SCHEMA ANALISI FUNZ.

• **Teo. Derivata della trasformata:** (Caso unidimens.)

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e per un certo n, sia $|x|^n f \in L^1(\mathbb{R})$ $\xrightarrow{\text{quindi}}$ $(1+|x|^n) f(x) \in L^1(\mathbb{R})$

Allora $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$ e $\frac{d^n}{d\xi^n}\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^n f(x)\right)(\xi)$ $\longrightarrow$ si può estendere con multi-indice

• **Estensione teo. der. trasf.:** Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, per un certo $k = 1, 2, 3, \dots$, sia $|x|^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Allora $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $\forall$ multi-indice α : $|\alpha| \leq n$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^\alpha f(x)\right) \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

• **Teo. di Inversione:** Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se anche $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha: $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(-x) \longrightarrow f(x) = \widehat{(\hat{f})}(-x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

• **Caso $\hat{f} = \hat{g}$:** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\hat{f} = \hat{g}$. Allora $f \equiv g$ (l'operatore $\mathcal{F}$ è iniettiva)

• **Corollario teo. di Inversione:** Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, condiz. nec. affinché anche $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è che

$f \in C^0_0(\mathbb{R})$

• **Esempi notevoli:** Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$

1. $\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \dfrac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$

2. Chiamo $f^a(x) = f(ax)$ $a > 0$ (dilatata di f) e $f_a(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$

   $\hookrightarrow \mathcal{F}(f^a)(\xi) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) = (\hat{f})_a$

   $\hookrightarrow \mathcal{F}(f_a) = (\hat{f})^a$

3. $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$

4. $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \dfrac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$

5. $\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi^2}$

6. $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}$ $a > 0$

7 Trasformata di una traslata

- $\mathcal{F}(f(x+a))(\xi) = e^{2\pi i a \xi}\hat{f}(\xi)$
- $\mathcal{F}(f(x)e^{2\pi i a x})(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$

8 $\mathcal{F}(f(x)\cos wx)(\xi) = \frac{1}{2}\left\{\hat{f}\left(\xi - \frac{w}{2\pi}\right) + \hat{f}\left(\xi + \frac{w}{2\pi}\right)\right\}$

$\mathcal{F}(f(x)\sin wx)(\xi) = \frac{1}{2i}\left\{\hat{f}\left(\xi - \frac{w}{2\pi}\right) - \hat{f}\left(\xi + \frac{w}{2\pi}\right)\right\}$

- **Poli**: Sia $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q polinomi (a coeff. reali o complessi) t.c.:

1. $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $gr\, q \geq (gr\, p) + 1$ → se $gr\, q \geq (gr\, p) + 2$ e $q(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$
   → se $gr\, q = (gr\, p) + 1$ e $q(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$

Diciamo che $a \in \mathbb{C}$ è un polo di ordine $K (= 1, 2, 3, \dots)$. Se $q(x)$ si annulla di ordine k in a mentre $p(a) \neq 0$.

- **Residuo**:

- Sia a un polo del 1° ordine per la funzione $\frac{p(z)}{q(z)}$. Allora:

residuo

$$\mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}, a\right) = \lim_{z \to a}\left\{(z-a)\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}\right\}$$

- Sia a un polo del 1° ordine con $p(a) \neq 0$, $q(z)$ si annulla del 1° ordine in a. Allora:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}, a\right) = \frac{p(a)e^{ika}}{q'(a)}$$

- Sia $z = a$ un polo di ordine $h \geq 2$ per la funz. raz. $\frac{p(z)}{q(z)}$. Allora:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}, a\right) = \frac{1}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}\left[(z-a)^h \frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}\right]_{/z=a}$$

- **Teo. Residui**: Sia $\frac{p(z)}{q(z)}$ una funz. razionale t.c.: $q(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $gr\, q \geq gr\, p + 1$. Sia $K \in \mathbb{R}$. Allora:

$K = -2\pi\xi$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{p(z)}{q(z)}e^{ikx}\,dx = \begin{cases} K > 0 & 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}, z_k\right) \\ K < 0 & -2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}, z_k\right) \end{cases}$$

→ z_k poli di $\frac{p(z)}{q(z)}$ nel semipiano $\mathrm{Im}\, z > 0$

→ z_k poli di $\frac{p(z)}{q(z)}$ nel semipiano $\mathrm{Im}\, z < 0$