

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate  
 Quarto appello. Febbraio 2019  
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

<b>Cognome:</b>	
<b>Nome</b>	
<b>N° matr. o cod. persona:</b>	

**Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)**

**A. (6 punti).** Per una successione di funzioni  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme, commentandone la differenza. Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

**B. (6 punti).** La trasformata di Fourier in  $L^2$ : dopo aver definito lo spazio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier (senza dimostrazione), **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Quindi enunciare con precisione le principali proprietà della trasformata di Fourier su  $L^2(\mathbb{R}^n)$  e **dimostrarle**.

**C. (6 punti).** Lo spazio di distribuzioni  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  o tutto  $\mathbb{R}^n$ ): definirlo (richiamando anche la definizione precisa dello spazio di funzioni test e della convergenza di successioni in questo spazio), fare esempi di classi di distribuzioni, **dimostrando** che quelle definite sono effettivamente distribuzioni. Mostrare in particolare in che senso il concetto di distribuzione generalizza quello di funzione e quello di misura. Infine, mostrare come si arriva alla definizione del concetto di derivata di una distribuzione  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , in modo che nel caso particolare di distribuzioni indotte da funzioni  $C^1(\mathbb{R})$  la derivata distribuzionale coincida con la derivata classica, e **dimostrare** che la derivata di una distribuzione è effettivamente una distribuzione.

**D. (6 punti).** Dopo aver brevemente introdotto il problema a cui risponde il Teorema di Shannon, enunciare e **dimostrare** questo teorema.

**Risolvere i seguenti esercizi**

**1. (5 punti).** Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \left( q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

con  $L = 5$ ,  $C = 1$ ,  $R = 6$ ,  $q_0 = -1$  e condizione iniziale  $i(0) = 0$ .

Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente  $i(t)$  nel circuito, per una generica tensione  $v(t)$  Laplace trasformabile.

**2. (5 punti).** Sia

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata  $T_f$ , giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria. Infine, scrivere esplicitamente il valore di  $\langle \widehat{T}_f, \phi \rangle$  per  $\phi \in \mathcal{S}(R)$  ("esplicitamente" significa: mediante un'espressione che coinvolge i valori di  $\phi$  ed eventualmente delle sue derivate, ma non di  $\widehat{\phi}$ ).

**3. (5 punti).** Si consideri il filtro avente risposta all'impulso

$$h(t) = \left(1 - (2\pi t)^2\right) \chi_{\left(-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right)}(t).$$

a. Si calcoli la risposta del filtro al gradino, cioè l'uscita corrispondente all'ingresso  $u(t)$ .

b. Si calcoli la risposta in frequenza  $H(\xi)$ .

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate  
 Quarto appello. Febbraio 2019  
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti  
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

**Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)**

**A. (6 punti).** Per una successione di funzioni  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme, commentandone la differenza. Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

**Risposta: v. libro di testo, §1.2.1**

**B. (6 punti).** La trasformata di Fourier in  $L^2$ : dopo aver definito lo spazio  $S(\mathbb{R}^n)$  delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier (senza dimostrazione), **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Quindi enunciare con precisione le principali proprietà della trasformata di Fourier su  $L^2(\mathbb{R}^n)$  e **dimostrarle**.

**Risposta: v. libro di testo, §7.4.1-7.4.2.**

**C. (6 punti).** Lo spazio di distribuzioni  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  o tutto  $\mathbb{R}^n$ ): definirlo (richiamando anche la definizione precisa dello spazio di funzioni test e della convergenza di successioni in questo spazio), fare esempi di classi di distribuzioni, **dimostrando** che quelle definite sono effettivamente distribuzioni. Mostrare in particolare in che senso il concetto di distribuzione generalizza quello di funzione e quello di misura. Infine, mostrare come si arriva alla definizione del concetto di derivata di una distribuzione  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , in modo che nel caso particolare di distribuzioni indotte da funzioni  $C^1(\mathbb{R})$  la derivata distribuzionale coincida con la derivata classica, e **dimostrare** che la derivata di una distribuzione è effettivamente una distribuzione.

**Risposta: v. libro di testo, §9.2.1.**

**D. (6 punti).** Dopo aver brevemente introdotto il problema a cui risponde il Teorema di Shannon, enunciare e **dimostrare** questo teorema.

**Risposta: v. libro di testo, §10.3.**

**Risolvere i seguenti esercizi**

**1. (5 punti).** Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \left( q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

con  $L = 5, C = 1, R = 6, q_0 = -1$  e condizione iniziale  $i(0) = 0$ .

Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente  $i(t)$  nel circuito, per una generica tensione  $v(t)$  Laplace trasformabile.

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri e ponendo  $I(s) = \mathcal{L}(i)(s), V(s) = \mathcal{L}(v)(s)$  si ha:

$$\begin{aligned} L(sI(s) - i(0)) + RI(s) + \frac{1}{Cs} (q_0 + I(s)) &= V(s) \\ \left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I(s) &= V(s) + Li(0) - \frac{1}{Cs} q_0 \\ I(s) &= \frac{V(s)}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} + \frac{Li(0) - \frac{1}{Cs} q_0}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \end{aligned}$$

e per  $L = 5, C = 1, R = 6, q_0 = -1, i(0) = 0$  si ha

$$\begin{aligned} I(s) &= V(s) \frac{1}{5s + 6 + \frac{1}{s}} + \frac{\frac{1}{s}}{5s + 6 + \frac{1}{s}} \\ &\equiv V(s) H(s) + G(s) \end{aligned}$$

con

$$H(s) = \frac{s}{5s^2 + 6s + 1}; G(s) = \frac{1}{5s^2 + 6s + 1},$$

funzioni che dobbiamo ora antitrasformare.

$$H(s) = \frac{s}{(5s+1)(s+1)} = \frac{a}{5s+1} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + b(5s+1)}{(5s+1)(s+1)}$$

$$\begin{cases} a + 5b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad b = \frac{1}{4}, a = -\frac{1}{4}$$

$$H(s) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{5s + \frac{1}{5}} \right\} = \mathcal{L} \left( \frac{1}{4} \left( e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} \right) \right).$$

$$G(s) = \frac{1}{5s^2 + 6s + 1} = \frac{a}{5s+1} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + b(5s+1)}{(5s+1)(s+1)}$$

$$\begin{cases} a + 5b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad b = -\frac{1}{4}, a = \frac{5}{4}$$

$$G(s) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{5}} - \frac{1}{s+1} \right\} = \mathcal{L} \left( \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{t}{5}} - e^{-t} \right) \right)$$

$$I(s) = \mathcal{L} \left( v(t) * \left( \frac{1}{4} \left( e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} \right) \right) + \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{t}{5}} - e^{-t} \right) \right)$$

perciò la soluzione è:

$$\begin{aligned} i(t) &= v(t) * \left( \frac{1}{4} \left( e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} \right) \right) + \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{t}{5}} - e^{-t} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{t}{5}} - e^{-t} \right) + \frac{1}{4} \int_0^t \left( e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{5} e^{-\frac{(t-\tau)}{5}} \right) v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

**2. (5 punti).** Sia

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata  $T_f$ , giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria. Infine, scrivere esplicitamente il valore di  $\langle \widehat{T_f}, \phi \rangle$  per  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (“esplicitamente” significa: mediante un’espressione che coinvolge i valori di  $\phi$  ed eventualmente delle sue derivate, ma non di  $\widehat{\phi}$ ).

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{ix}{x^2+i} \\ \mathcal{F}(T_f) &= \mathcal{F}(x) - i\mathcal{F}\left(\frac{x}{x^2+i}\right) \end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{-2\pi i} \delta',$$

mentre  $\mathcal{F}\left(\frac{x}{x^2+i}\right)$  si calcola col metodo dei residui perché  $\frac{x}{x^2+i}$  è una funzione razionale  $L^2(\mathbb{R})$ . La funzione ha poli del prim’ordine per  $z^2 = -i, z = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$ , quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{x}{x^2+i}\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+i} e^{-2\pi i \xi x} dx = \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2+i} e^{-2\pi i z \xi}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2+i} e^{-2\pi i z \xi}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{z}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{/z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \\ \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{z}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{/z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -\pi i \left(e^{-\sqrt{2}\pi i(1-i)\xi}\right) \\ \text{se } \xi < 0 & \pi i \left(e^{-\sqrt{2}\pi i(-1+i)\xi}\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -\pi i \left(e^{-\sqrt{2}\pi \xi} e^{-\sqrt{2}\pi i \xi}\right) \\ \text{se } \xi < 0 & \pi i \left(e^{\sqrt{2}\pi \xi} e^{\sqrt{2}\pi i \xi}\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & \pi i \left(e^{-\sqrt{2}\pi |\xi|} (-\cos(\sqrt{2}\pi \xi) + i \sin(\sqrt{2}\pi \xi))\right) \\ \text{se } \xi < 0 & \pi i \left(e^{-\sqrt{2}\pi |\xi|} (\cos(\sqrt{2}\pi \xi) + i \sin(\sqrt{2}\pi \xi))\right) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(T_f) &= \frac{i}{2\pi} \delta' + \pi e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \left( -\operatorname{sgn}(\xi) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) \\
\langle \mathcal{F}(T_f), \phi \rangle &= \left\langle \frac{i}{2\pi} \delta' + \pi e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \left( -\operatorname{sgn}(\xi) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right), \phi \right\rangle \\
&= -\frac{i}{2\pi} \phi'(0) + \pi \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \left( -\operatorname{sgn}(\xi) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) \phi(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

**3. (5 punti).** Si consideri il filtro avente risposta all'impulso

$$h(t) = \left(1 - (2\pi t)^2\right) \chi_{\left(-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right)}(t).$$

a. Si calcoli la risposta del filtro al gradino, cioè l'uscita corrispondente all'ingresso  $u(t)$ .

b. Si calcoli la risposta in frequenza  $H(\xi)$ .

a. Calcoliamo

$$Au(t) = (h * u)(t) = \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \left(1 - (2\pi\tau)^2\right) u(t - \tau) d\tau$$

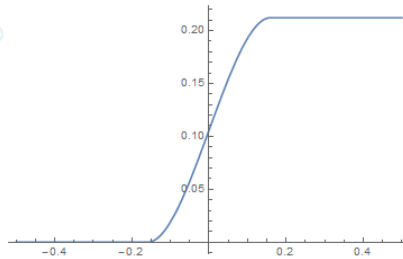
e poiché  $u(t - \tau) \neq 0$  per  $\tau < t$

$$= \begin{cases} \text{se } t > 1/2\pi & \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \left(1 - (2\pi\tau)^2\right) d\tau \\ \text{se } t \in \left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right] & \int_{-1/2\pi}^t \left(1 - (2\pi\tau)^2\right) d\tau \\ \text{se } t < -\frac{1}{2\pi} & 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \left(1 - (2\pi\tau)^2\right) d\tau &= [2\pi\tau = x] = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2\pi}^t \left(1 - (2\pi\tau)^2\right) d\tau &= [2\pi\tau = x] = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{2\pi t} (1 - x^2) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi t + 1 - \frac{(2\pi t)^3 + 1}{3}\right) \\
&= \frac{6\pi t + 2 - (2\pi t)^3}{6\pi}
\end{aligned}$$

$$Au(t) = \begin{cases} \text{se } t > 1/2\pi & \frac{2}{3\pi} \\ \text{se } t \in \left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right] & \frac{3\pi t + 1 - 4(\pi t)^3}{3\pi} \\ \text{se } t < -\frac{1}{2\pi} & 0 \end{cases}$$



b. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
 H(\xi) &= \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} (1 - (2\pi t)^2) e^{-2\pi i t \xi} dt = [2\pi t = x] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - x^2) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1 - x^2) \cos(x\xi) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ (1 - x^2) \frac{\sin(x\xi)}{\xi} \right]_0^1 + \int_0^1 2x \frac{\sin(x\xi)}{\xi} dx \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi\xi} \int_0^1 x \sin(x\xi) dx = \frac{2}{\pi\xi} \left\{ \left[ -x \frac{\cos(x\xi)}{\xi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(x\xi)}{\xi} dx \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi\xi^2} \left\{ -\cos \xi + \frac{\sin \xi}{\xi} \right\} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \xi - \xi \cos \xi}{\xi^3}.
 \end{aligned}$$