Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Primo appello. 12 Luglio 2017
A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. Mostrare con opportuni controesempi la necessità delle ipotesi. Quindi, utilizzando il teorema precedente, **dimostrare** la completezza dello spazio $C^1([a,b])$ con la norma opportuna.

B. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata e derivata n-esima di una funzione.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di traslata $\tau_a T$, dilatata $D_a T$, riflessa $T^\vee$ di una distribuzione T, e di prodotto gT con g funzione regolare, enunciare le formule di derivazione per queste 4 espressioni di T, **dimostrando** quella della dilatata e del prodotto.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f_n(x) = \frac{n \sin \frac{x}{n}}{1+x} \text{ per } x \in [0, +\infty).$$

a. Calcolare il limite puntuale $f(x)$ di $f_n(x)$ in $[0, +\infty)$.
b. Stabilire se f_n tende a f uniformemente in $[0, +\infty)$.
c. Stabilire se f_n tende a f in $L^1(0, +\infty)$ e se tende a f in $L^1(0, 10)$.

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.
b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ col metodo dei residui. Riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata, separando parte reale e immaginaria.

3. (5 punti).
a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata

$$\left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)'.$$

Per far questo si chiede anzitutto di calcolare esplicitamente, per $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'espressione

$$\left\langle \left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)', \phi \right\rangle$$

(si raccomanda di procedere ordinatamente, applicando le definizioni e riportando tutti i passaggi), e quindi riesprimere il risultato trovato nella forma $\langle T, \phi \rangle$ dove T è espressa nel modo più semplice possibile mediante opportune derivate della δ.
b. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata di T_f dove

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

giustificando il procedimento in base ai risultati studiati.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Primo appello. 12 Luglio 2017
A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. Mostrare con opportuni controesempi la necessità delle ipotesi. Quindi, utilizzando il teorema precedente, **dimostrare** la completezza dello spazio $C^1([a,b])$ con la norma opportuna.

[Risposta: v. Dispensa, §1.2.2]

B. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

[Risposta: v. Dispensa, §4.1, 4.2]

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata e derivata n-esima di una funzione.

[Risposta: v. Dispensa, §6.2]

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di traslata $\tau_a T$, dilatata $D_a T$, riflessa $T^\vee$ di una distribuzione T, e di prodotto gT con g funzione regolare, enunciare le formule di derivazione per queste 4 espressioni di T, **dimostrando** quella della dilatata e del prodotto.

[Risposta: v. Dispensa, §6.2.3]

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f_n(x) = \frac{n \sin \frac{x}{n}}{1+x} \text{ per } x \in [0, +\infty).$$

a. Calcolare il limite puntuale $f(x)$ di $f_n(x)$ in $[0, +\infty)$.
b. Stabilire se f_n tende a f uniformemente in $[0, +\infty)$.
c. Stabilire se f_n tende a f in $L^1(0, +\infty)$ e se tende a f in $L^1(0, 10)$.

a. Per $n \to \infty$ è

$$\frac{n \sin \frac{x}{n}}{1+x} \sim \frac{n \frac{x}{n}}{1+x} = \frac{x}{1+x} = f(x).$$

b.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n \sin \frac{x}{n} - x}{1+x} \right| \equiv g_n(x).$$

$$g_n(n) = \frac{|n(\sin 1 - 1)|}{1+n} \to 1 - \sin 1 \neq 0,$$

perciò f_n non tende a f uniformemente.
c. $f \notin L^1(0, +\infty)$ quindi f_n non può convergere a f in questo spazio. In $L^1(0, 10)$ mostriamo la convergenza usando il teorema di Lebesgue:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n \sin \frac{x}{n}}{1+x} \right| \leq \frac{n \frac{x}{n}}{1+x} = \frac{x}{1+x} \in L^1(0, 10),$$

perciò per il teorema di Lebesgue $f_n \to f$ in $L^1(0, 10)$.

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.
b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ col metodo dei residui. Riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata, separando parte reale e immaginaria.

a. $f \in L^1(\mathbb{R})$, quindi sarà $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R})$; f è reale né pari né dispari, perciò a priori $\widehat{f}$ non sarà né reale né immaginaria pura e non avrà simmetrie; f è infinitamente derivabile, quindi $\widehat{f}$ tenderà a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x; f tende a zero come $1/x^4$, cioè f e $x^2 f \in L^1(\mathbb{R})$, perciò $\widehat{f}$ sarà $C^2(\mathbb{R})$.

b. La funzione $f(z)$ ha poli del second'ordine in $z = -1 \pm 2i$,

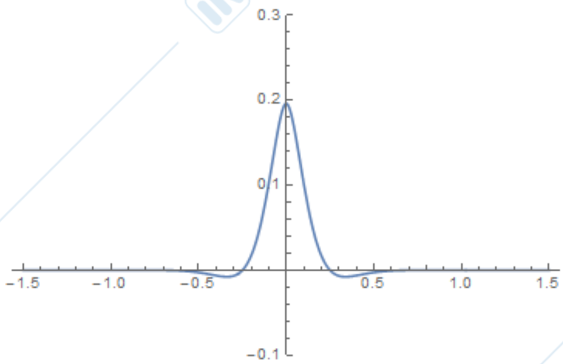
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(x^2+2x+5)^2} dx = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z^2+2z+5)^2}, -1+2i\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z^2+2z+5)^2}, -1-2i\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z+1+2i)^2}\right)'_{/z=-1+2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z+1-2i)^2}\right)'_{/z=-1-2i} \end{cases}$$

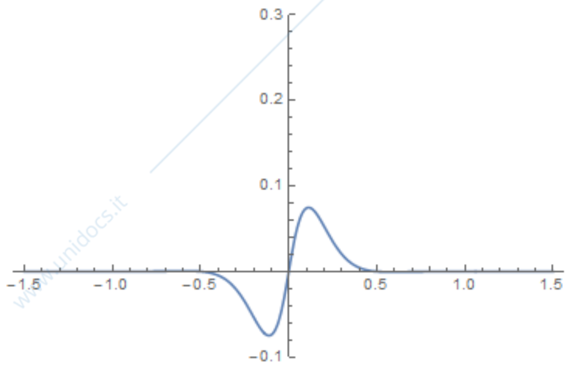
$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(e^{-2\pi i z\xi} \frac{-2\pi i\xi(z+1+2i)-2}{(z+1+2i)^3}\right)_{/z=-1+2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(e^{-2\pi i z\xi} \frac{-2\pi i\xi(z+1-2i)-2}{(z+1-2i)^3}\right)_{/z=-1-2i} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(e^{-2\pi i\xi(-1+2i)} \frac{-2\pi i\xi(4i)-2}{(4i)^3}\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(e^{-2\pi i\xi(-1-2i)} \frac{-2\pi i\xi(-4i)-2}{(-4i)^3}\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \pi \left(e^{4\pi\xi} e^{2\pi i\xi} \frac{-4\pi\xi+1}{16}\right) \\ \text{se } \xi > 0 & \pi \left(e^{-4\pi\xi} e^{2\pi i\xi} \frac{4\pi\xi+1}{16}\right) \end{cases} = \frac{\pi}{16} e^{-4\pi|\xi|} (4\pi|\xi|+1)(\cos(2\pi\xi) + i\sin(2\pi\xi)).$$



$\operatorname{Re} \widehat{f}(\xi)$



$\operatorname{Im} \widehat{f}(\xi)$

3. (5 punti).

a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata

$$\left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)'.$$

Per far questo si chiede anzitutto di calcolare esplicitamente, per $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'espressione

$$\left\langle \left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)', \phi \right\rangle$$

(si raccomanda di procedere ordinatamente, applicando le definizioni e riportando tutti i passaggi), e quindi riesprimere il risultato trovato nella forma $\langle T, \phi \rangle$ dove T è espressa nel modo più semplice possibile mediante opportune derivate della δ.

b. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata di T_f dove

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

giustificando il procedimento in base ai risultati studiati.

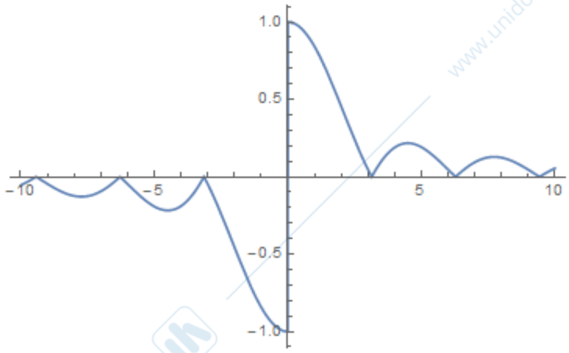
a.

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)', \phi \right\rangle &= -\left\langle D_2\left(e^{-x}\delta'\right), \phi' \right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle e^{-x}\delta', D_{1/2}\left(\phi'\right)\right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \delta', e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \delta, \left(e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right)\right)'\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right)\right)'(0) = \frac{1}{2}\left(-e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-x}\phi''\left(\frac{x}{2}\right)\right)(0) \\
&= -\frac{1}{2}\phi'(0) + \frac{1}{4}\phi''(0) = \left\langle \frac{1}{2}\delta' + \frac{1}{4}\delta'', \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)' = \frac{1}{2}\delta' + \frac{1}{4}\delta''.$$

b. La funzione $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ è regolare a tratti, con:
una discontinuità a salto in $x = 0$, con $f(0^+) - f(0^-) = 2$;
punti angolosi per $x = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$



Nei punti $x \neq k\pi$, dove f è derivabile in senso classico, si ha:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \operatorname{sgn}(\sin x)\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right).$$

Poiché la derivata distribuzionale di una funzione continua e regolare a tratti coincide con la derivata classica (definita quasi ovunque) e la derivata di un gradino coincide con il salto moltiplicato per la δ nel punto di salto, si ha:

$$
\begin{aligned}
(T_f)' = T_{f'} + 2\delta &= \operatorname{sgn}(\sin x)\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) + 2\delta \\
&= \left(\frac{x\cos x\,\operatorname{sgn}(\sin x) - |\sin x|}{x^2}\right) + 2\delta.
\end{aligned}
$$