SCHEMA ANALISI FUNZ.

- **Classe di Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$:** Si dice classe di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida la classe $S(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) t.c. :
  - $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
  - per ogni intero $K \geq 0$ e multindice α:

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^K D^\alpha f(x) = 0$$

- **Proprietà $S(\mathbb{R}^n)$:**
  1. $\forall p \in [1,+\infty]$ $\quad S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$
  2. $\forall p \in [1,+\infty)$ $\quad S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$
     $\hookrightarrow \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,+\infty)$ $\quad \exists \{f_k\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$
  3. $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\forall$ multindice α $\quad x^\alpha f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$

- **Teo. Trasformata di Fourier su $S(\mathbb{R}^n)$:**
  1. $\forall f \in S(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$
  2. $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ è biunivoco $\to$ Vale il teo. di inversione $\to \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\hat{\hat{f}}(-x) = f(x)$
  3. $\forall f,g \in S(\mathbb{R}^n)$: $\quad \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bar{\hat{g}}$ $\to$ si conserva il prodotto scalare
  4. $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\quad \|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ $\to$ si conserva la norma L^2

- **Teo. $\{\hat{f}_k\}$ converge in L^2:**
  - Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$
  - Poiché $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in L^2, $\exists \{f_k\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\|f_k - f\|_{L^2} \longrightarrow 0$

  Allora: la successione $\{\hat{f}_k\}$ converge a una funzione L^2, che non dipende dalla particolare successione approssimante $\{f_k\}$.

- **Teo. Trasformata di Fourier su L^2:** l'operatore $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$:
  1. È lineare e biunivoco
  2. Conserva il prodotto scalare: $\forall f,g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bar{\hat{g}}$
     Conserva la norma L^2: $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$
  3. Vale la formula di inversione $\to \forall f \in L^2$ $\quad \hat{\hat{f}}(-x) \overset{q.o.}{=} f(x)$
  4. $\forall f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$ le trasf. di Fourier di f def. come funz. L^1 e come funz. L^2 coincidono
  5. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad \hat{f}(\xi) = \lim_{K\to\infty} \int_{|y|<K} f(y)\, e^{-2\pi i y \xi}\, dy$

• **Def. funz. $\mathcal{L}$-trasformabile:** Sia $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), misurabile e Lebesgue integr. su ogni intervallo limitato del tipo $[0,k]$ per $k>0$. Si dice che f è Laplace-trasf. se esiste un $s_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $e^{-s_0 t} f(t) \in L^1(0,+\infty)$, ossia t.c. converga ass. l'integrale di Lebesgue:

$$\mathcal{L}f(s_0) = \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\,dt$$

→ se $s_0 = \sigma + i\omega$, $t \in (0,+\infty)$

$$|e^{-s_0 t} f(t)| = e^{-\sigma t} |f(t)|$$

↳ se esiste $s_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $e^{-s_0 t} f(t) \in L^1(0,+\infty)$, allora per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re\{s\} \geq Re\{s_0\}$ si ha:

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-(Re\{s\})t} |f(t)| \leq e^{-(Re\{s_0\})t} |f(t)| \in L^1(0,+\infty)$$

• **Def. Ascissa e semipiano di convergenza:** Se $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è $\mathcal{L}$-trasformabile:

- **ASCISSA DI CONVERGENZA:** $\sigma[f] = \inf\{s \in \mathbb{R} : e^{-st}|f(t)| \in L^1(0,+\infty)\}$
- **PIANO DI CONVERGENZA:** $\Pi_f = \{s \in \mathbb{C} : Re\{s\} > \sigma[f]\}$

• **Esistenza $\mathcal{L}f(s)$ $\forall \Pi_f$:** Se $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è $\mathcal{L}$-trasf., $\forall s \in \Pi_f$ esiste:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

• **Def. Segnale:** Chiamiamo segnale una funz. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) per cui sia $f(t)=0$ per $t<0$.

• **Linearità $\mathcal{L}$-trasf.:** f, g $\mathcal{L}$-trasf., $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Allora $c_1 f + c_2 g$ è $\mathcal{L}$-trasf. e vale $\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \mathcal{L}(f) + c_2 \mathcal{L}(g)$ e $\sigma_0 = \max(\sigma[f], \sigma[g])$

• **Esempi notevoli:**

1. $\mathcal{L}(u)(s) = \frac{1}{s}$
2. $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$
3. $\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
4. $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

5: $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

- Funz. certamente $\mathcal{L}$-trasf.: $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) mis. è certamente $\mathcal{L}$-trasf. se ha ordine esponenziale, cioè se per certe $c, \alpha \in \mathbb{R}$ vale: $|f(t)| \le c e^{\alpha t}$ $\forall t \in (0,+\infty)$

- Trasf. Laplace e trasf. Fourier: $\mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = \mathcal{F}(e^{-\sigma t} f(t) u(t))(\frac{\omega}{2\pi})$

- Teo. Iniettività $\mathcal{L}$-trasf.: Sia f $\mathcal{L}$-trasf. avente $\mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = 0$ $\forall \omega \in \mathbb{R}$ e per $\sigma > \sigma[f]$.
$\Longrightarrow$ $f(t) = 0$ per q.o. $t > 0$

↳ se f, g t.c. $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g(s) \Longrightarrow f(t) = g(t)$ per q.o. $t > 0$

- Proprietà $\mathcal{L}$-trasf.: Sia f $\mathcal{L}$-trasf. Allora:

 1: Per $s_0 > \sigma[f]$ $\exists c > 0$ t.c. $|\mathcal{L}f(s)| \le c$ $\forall s$ t.c. $Re\{s\} \ge Re\{s_0\}$

 2: $\lim_{Re\{s\} \to +\infty} \mathcal{L}f(s) = 0$

 3: $\mathcal{L}f \in C^\infty(\Pi_f)$ e $\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}f(s)) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s)$

- Def. Convoluzione per $\mathcal{L}$-trasf.: Siano $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ t.c. $f, g \in L^1(0,K)$ $\forall K > 0$
Allora $\forall t > 0$ $\exists (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$ e $f * g \in L^1(0,K)$ $\forall K > 0$

- Teo. $\mathcal{L}$-trasf. della convoluz.: Se f, g sono 2 segnali $\mathcal{L}$-trasf., allora anche $f * g$ è $\mathcal{L}$-trasf., con $\sigma[f * g] = \max(\sigma[f], \sigma[g])$ e vale: $\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$