

## A. Spazi di misura

**Esercizio 2.1.** La funzione è definita e continua per  $x \neq 0$  e  $\sin \frac{1}{x} \neq 0$ , cioè  $\frac{1}{x} \neq k\pi, x \neq \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ . La funzione è limitata e: per  $x \rightarrow 0$  non esiste limite (né finito né infinito), mentre per  $x \rightarrow \frac{1}{k\pi}$  ha discontinuità a salto. L'insieme dei punti di discontinuità è numerabile, dunque di misura di Lebesgue nulla. Perciò la funzione, essendo limitata, continua quasi ovunque, e definita su un intervallo limitato, è Riemann integrabile.

**Esercizio 2.2.**  $\mu_1$  è una misura con peso, perché  $f(x) = e^{x^2}$  è misurabile e non negativa.

$\mu_2$  non è una misura perché la densità  $f(x) = xe^{-|x|}$  assume anche valori negativi; perciò ad esempio  $\mu_2(-1, 0) < 0$ , mentre la misura di un insieme dev'essere sempre  $\geq 0$ .

$\mu_3$  è una misura.

$\mu_4$  non è una misura perché non è additiva, a causa della non linearità della funzione  $t^2$ : se  $A, B$  sono misurabili e disgiunti si ha

$$\begin{aligned}\mu_4(A \cup B) &= |A \cup B|^2 = (|A| + |B|)^2 = |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 \\ &= \mu_4(A) + \mu_4(B) + 2|A||B|.\end{aligned}$$

$\mu_5$  è una misura perché combinazione lineare di misure con coefficienti positivi.

$\mu_6$  è una misura con peso, rispetto al peso  $f(x) = e^{-x^2} \cdot \chi_{(-\infty, 0)}(x)$ , che è non negativa e misurabile.

$\mu_7$  non è una misura perché non è numerabilmente additiva, ad esempio ogni insieme  $\{n\}$  ha misura 1 mentre  $\mu_7(\cup_{n=1}^{\infty} \{n\}) = 0$ .

$\mu_8$  è la misura del conteggio.

$\mu_9$  è una misura, finita.

$\mu_{10}$  non è una misura perché assume anche valori negativi, ad esempio  $\mu_{10}(\{-1\}) = -1$ .

**Esercizio 2.3.** Poiché  $f(t) = t$  q.o.,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}.$$

**Esercizio 2.4.**

	(a)	(b)	(c)	(d)
$f_1$	no	sì	sì	sì
$f_2$	sì	no	no	no
$f_3$	sì	no	sì	sì
$f_4$	sì	no	no	no
$f_5$	sì	no	no	no
$f_6$	no	sì	no	sì

**Esercizio 2.5.**

(a) Non è semplice, assume ogni valore reale in  $(0, 1]$ .

(b) Semplice, assume solo i valori 0 e 1 (ed è misurabile).

(c) Non è semplice, assume come valori 1 e gli infiniti valori reali  $\leq 0$ .

(d) Assume come possibili valori tutte le somme parziali della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ , che sono tutti distinti. Quindi non è semplice.

(e) Semplice perché combinazione lineare di 10 funzioni caratteristiche.

(f) Calcoliamo l'integrale con cambio di variabile, distinguendo i casi:

$x > 0$ , ponendo  $xy = t$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(xy)}{y} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt.$$

$x < 0$ , ponendo  $xy = t$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(xy)}{y} dy = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt,$$

infinte per  $x = 0$  è

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(xy)}{y} dy = 0.$$

Quindi la funzione è semplice perché assume solo 3 valori:  $0, \pm \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt$ .

### Esercizio 2.6.

a. Vero, è continua tranne nei punti in cui si annulla il denominatore, che sono un numero finito.

b. Falso,  $1/x$  non è essenzialmente limitata in  $(-1, 1)$ .

c. Falso,  $1/x$  non è uguale quasi ovunque a una funzione limitata su ogni intervallo limitato.

d. Falso, la costante 1 è continua e non integrabile in  $\mathbb{R}$ .

e. Falso,  $1/x$  è continua quasi ovunque e non appartiene a  $L^1[-1, 1]$ .

f. Vero, perché in questo caso la funzione è Riemann integrabile in  $[a, b]$ , quindi appartiene a  $L^1[a, b]$ .

g. Falso, la costante 1 è continua, limitata e non integrabile in  $\mathbb{R}$ .

h. Falso,  $\chi_{\mathbb{Q}}$  è discontinua ovunque ma integrabile perché quasi ovunque nulla.

i, l. Falso, potrebbe non avere limite. Il contreesempio nel caso di  $f$  integrabile può essere:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [n, n + \frac{1}{n^2}] \text{ per qualche } n = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

perciò

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

perciò  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ non esiste.}$$

Se si vuole  $f \in C^0(\mathbb{R})$  occorre modificare l'esempio precedente, ad esempio così:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi n^2 x) & \text{se } x \in [n, n + \frac{1}{n^2}] \text{ per qualche } n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché  $\sin(\pi n^2 x)$  si annulla in  $x = n$  e  $x = n + \frac{1}{n^2}$  la funzione è continua; è ancora vero che non esiste limite all'infinito e

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

perciò  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .