Compiti di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate
a.a. 2020/2021. Politecnico di Milano
Settimana 5
Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la quinta settimana:
Libro di testo: Cap.3; Cap.4, §4.1-4.2.

Si raccomanda di leggere, nel testo del Cap.3, tutti gli *esempi* di operatori lineari continui e funzionali lineari continui.

Tra gli esempi di spazi di Hilbert, abbiamo parlato dello spazio ℓ^2. Per riflettere, più in generale, sugli spazi ℓ^p, si veda l'Esercizio 2.26 (nel Cap.2).

Svolgere gli esercizi dal libro di testo:
Operatori lineari continui: 3.1
Funzionali lineari continui: 3.13, 3.16, 3.17.
Spazi di Hilbert: 4.1.

Il seguente esercizio è stato suggerito a lezione, svolgerlo:

Esercizio 6 Si vuole dimostrare che, tra tutti gli spazi $L^p(\mathbb{R})$, solo $L^2(\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert, ossia (poiché già sappiamo che $L^2(\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert), si vuole dimostrare che: "per ogni $p \in [1,\infty], p \neq 2$, la norma $L^p(\mathbb{R})$ non proviene da alcun prodotto scalare". A sua volta, in base a quanto visto a lezione, questo seguirà se si mostra che:

"per ogni $p \in [1,\infty], p \neq 2$, la norma $L^p(\mathbb{R})$ non soddisfa l'uguaglianza del parallelogramma" (v. Teorema 4.1, punto 3).

L'esercizio consiste nel verificare analiticamente che se si applica l'uguaglianza del parallelogramma per la norma $L^p(\mathbb{R})$ alle funzioni

$$f(x) = \chi_{(0,1)}(x), g(x) = \chi_{(1,2)}(x),$$

si ottiene una relazione che è falsa per tutti i $p \in [1,\infty], p \neq 2$. (Nel calcolo, occorrerà distinguere il caso $p = \infty$ dagli altri casi).

Esercizio 7 Modificando opportunamento l'esempio precedente, dimostrare che negli spazi $C_0^0(\mathbb{R}), C_*^0(\mathbb{R}), C_b^0(\mathbb{R})$, la norma C^0 non proviene da un prodotto scalare.

Esercizi di riepilogo su convoluzioni, spazi di funzioni continue, derivabili, integrabili:

Svolgere l'esercizio sulla convoluzione del seguente tema d'esame (scaricabile dalla pagina web del corso):

A.A. 2017/18, primo appello, recupero sulla prima prova in itinere, Es. 2.

Svolgere anche il seguente:

Esercizio 8 Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
Se $f \in C^0_*(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
~~Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$~~
Se $f \in C^0_0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
Se $f \in C^0_*(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^\infty(\mathbb{R})$
Se $f \in C^0_*(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in C^0_*(\mathbb{R})$

Per i curiosi: scaricare dalla pagina web del corso le *note storiche sull'analisi funzionale*. (Fuori programma).