

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Prima prova in itinere. Aprile 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a, b])$ è di Banach.

B. (6 punti). Si definisca cosa si intende per convoluzione di due funzioni in \mathbb{R}^n e si illustrino le proprietà della convoluzione viste nel corso. In particolare, si enunci e **dimostri** un risultato preciso che riguarda la convoluzione di due funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si enunci poi il risultato analogo che estende il precedente a spazi L^p .

C. (6 punti). Dare la definizione di: spazio vettoriale; spazio vettoriale normato; spazio metrico. (“Dare la definizione” significa in particolare fare l’elenco completo delle proprietà richieste dalla definizione stessa). Illustrare le relazioni che valgono o non valgono tra questi concetti, portando contresempi espliciti. Quindi dare la definizione di successione di Cauchy in uno spazio vettoriale normato, dare la definizione di spazio di Banach, e fare un esempio di uno spazio di Banach e uno spazio vettoriale normato che non è di Banach. (Tutti gli esempi utilizzati nelle risposte a questa domanda devono essere spazi *di funzioni*, non spazi di dimensione finita).

D. (6 punti). Operatori lineari continui tra due spazi vettoriali normati: si enunci con precisione e **si dimostri** il teorema che sta alla base della definizione di “operatore lineare continuo” (equivalenza tra tre condizioni), si dia quindi questa definizione e la definizione di norma di un operatore. Si facciano diversi esempi di operatori lineari continui tra *spazi di funzioni* (non tra spazi di dimensione finita).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f \cdot g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f * g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^3(0, 1)$ e $g \in L^2(0, 1)$, allora $f \cdot g \in L^1(0, 1)$
- Se $f \in C^0_*(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^4(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = \chi_{(-\pi, \pi)}(x) \sin x; \quad g(x) = e^{-|x|}$$

a. Prima di calcolare la convoluzione, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita, per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * g$ è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua.

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ (riportando ordinatamente il procedimento e i passi importanti del calcolo) e *semplificare l'espressione ottenuta*.

3. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 6}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

a quali spazi funzionali appartiene \widehat{f} ($L^p, C^0 \dots$); se \widehat{f} è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se \widehat{f} è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà \widehat{f} ; con che velocità tenderà a zero \widehat{f} . Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi \widehat{f} e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ nella forma più semplice.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Prima prova in itinere. Aprile 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

B. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty)$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**.

C. (6 punti). Si considerino i seguenti spazi di funzioni:

$$C^0[a, b], C^0(a, b), C^0(\mathbb{R}), C_*^0(\mathbb{R}), C_0^0(\mathbb{R}), C^1[a, b], C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ L^p(\mathbb{R}) \text{ per } p \in [1, \infty], L^p(\mathbb{R}) \text{ per } p \in (0, 1).$$

Di ciascuno di questi si dica se è uno spazio vettoriale, uno spazio vettoriale normato (con quale o quali norme), uno spazio vettoriale normato completo (con quale norma), giustificando le proprie affermazioni. Si precisi anche quali inclusioni valgono eventualmente tra questi spazi.

D. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (in particolare, elencando gli assiomi di prodotto scalare), si enuncino la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la proprietà che consente di definire una norma, e l'uguaglianza del parallelogramma. Si dia la definizione di spazio pre-hilbertiano e spazio di Hilbert, e si facciano esempi di spazi di Hilbert e di spazi pre-hilbertiani che non sono di Hilbert. Si enuncino e **dimostrino** le proprietà di continuità della norma e del prodotto scalare.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^0(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^5(\mathbb{R})$ e $g \in L^{5/3}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^0(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^1(\mathbb{R})$

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x) \cos x; \quad g(x) = e^{-|x|}$$

a. Prima di calcolare la convoluzione, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita, per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * g$ è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua.

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ (riportando ordinatamente il procedimento e i passi importanti del calcolo) e *semplificare l'espressione ottenuta*.

3. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 5ix - 6)^2}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

a quali spazi funzionali appartiene \widehat{f} ($L^p, C^0 \dots$); se \widehat{f} è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se \widehat{f} è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà \widehat{f} ; con che velocità tenderà a zero \widehat{f} . Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi \widehat{f} e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ nella forma più semplice.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Prima prova in itinere. Aprile 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a, b])$ è di Banach.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1

B. (6 punti). Si definisca cosa si intende per convoluzione di due funzioni in \mathbb{R}^n e si illustrino le proprietà della convoluzione viste nel corso. In particolare, si enunci e **dimostri** un risultato preciso che riguarda la convoluzione di due funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si enunci poi il risultato analogo che estende il precedente a spazi L^p .

Risposta: v. libro di testo, §2.6

C. (6 punti). Dare la definizione di: spazio vettoriale; spazio vettoriale normato; spazio metrico. (“Dare la definizione” significa in particolare fare l’elenco completo delle proprietà richieste dalla definizione stessa). Illustrare le relazioni che valgono o non valgono tra questi concetti, portando contresempi espliciti. Quindi dare la definizione di successione di Cauchy in uno spazio vettoriale normato, dare la definizione di spazio di Banach, e fare un esempio di uno spazio di Banach e uno spazio vettoriale normato che non è di Banach. (Tutti gli esempi utilizzati nelle risposte a questa domanda devono essere spazi di funzioni, non spazi di dimensione finita).

Risposta: v. libro di testo, §1.1.1, 1.2, 2.4.

D. (6 punti). Operatori lineari continui tra due spazi vettoriali normati: si enunci con precisione e **si dimostri** il teorema che sta alla base della definizione di “operatore lineare continuo” (equivalenza tra tre condizioni), si dia quindi questa definizione e la definizione di norma di un operatore. Si facciano diversi esempi di operatori lineari continui tra *spazi di funzioni* (non tra spazi di dimensione finita).

Risposta: v. libro di testo, §3.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^3(0, 1)$ e $g \in L^2(0, 1)$, allora $f \cdot g \in L^1(0, 1)$
- Se $f \in C^0_*(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^4(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$

a. Vero. Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R})$

$$|\widehat{f} \cdot g(x)| \leq \|\widehat{f}\|_{C^0} |g(x)| \in L^2(\mathbb{R}) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}),$$

per l'inclusione tra spazi L^p su insiemi di misura finita.

b. Falso. Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R})$, poiché $g \in L^2(\mathbb{R})$, si ha $\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$. In generale la convoluzione di una funzione L^2 e una funzione C^0_* potrebbe non essere neppure definita, in ogni caso una funzione C^0_* può non essere L^1 , perciò il teorema di Young non è applicabile.

c. Vero. $L^3(0, 1) \subset L^2(0, 1)$ (inclusione tra spazi L^p su insiemi di misura finita) e per la disuguaglianza di Hölder

$$f \in L^2(0, 1) \text{ e } g \in L^2(0, 1) \implies f \cdot g \in L^1(0, 1).$$

d. Vero. $f \in C^0_*(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$; $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^4(\mathbb{R})$, perciò

$$|fg(x)| \leq \|f\|_{C^0} |g(x)| \in L^4(\mathbb{R})$$

e. Vero. Per la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \end{aligned}$$

pertanto $(f * g)$ converge assolutamente a una funzione limitata,

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = \chi_{(-\pi, \pi)}(x) \sin x; \quad g(x) = e^{-|x|}$$

a. Prima di calcolare la convoluzione, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita, per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * g$ è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua.

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ (riportando ordinatamente il procedimento e i passi importanti del calcolo) e *semplificare l'espressione ottenuta*.

a. Poiché (in particolare) $f \in L^1(\mathbb{R})$ (in realtà sta in ogni spazio $L^p(\mathbb{R})$) e $g \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$, per il teorema di Young, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Poiché f è dispari e g è pari, sarà $f * g$ dispari. Poiché

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x-y|} \sin y dy,$$

l'integranda è continua rispetto a x e

$$\left| e^{-|x-y|} \sin y \chi_{(-\pi, \pi)}(y) \right| \leq \chi_{(-\pi, \pi)}(y) \in L^1(\mathbb{R}),$$

per il teorema di continuità degli integrali dipendenti da un parametro la convoluzione è continua.

b.

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x-y|} \sin y dy.$$

Poiché $f * g$ è dispari calcoliamo la convoluzione per $x > 0$, poi simmetizzeremo.

Per discutere il modulo distinguiamo i casi:

Se $x > \pi$ è sempre $y \leq x$, quindi

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x+y} \sin y dy = e^{-x} \int_{-\pi}^{\pi} e^y \sin y dy.$$

Se $x \in [0, \pi]$ allora spezziamo l'integrale:

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^x e^{-x+y} \sin y dy + \int_x^{\pi} e^{x-y} \sin y dy = e^{-x} \int_{-\pi}^x e^y \sin y dy + e^x \int_x^{\pi} e^{-y} \sin y dy.$$

Calcoliamo ora le primitive di $e^{\pm y} \sin y$. Si trova:

$$\begin{aligned} \int e^y \sin y dy &= \frac{1}{2} e^y (\sin y - \cos y) + c \\ \int e^{-y} \sin y dy &= -\frac{1}{2} e^{-y} (\sin y + \cos y) + c. \end{aligned}$$

Quindi: se $x > \pi$,

$$(f * g)(x) = e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^y (\sin y - \cos y) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} e^{-x} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = e^{-x} \operatorname{Sh} \pi.$$

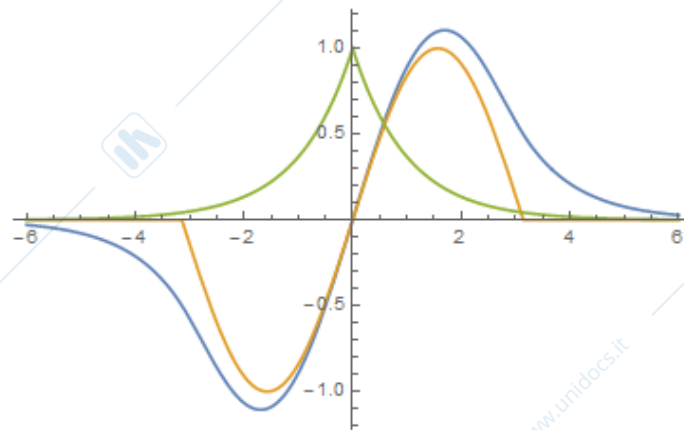
Se $x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^y (\sin y - \cos y) \right]_{-\pi}^x + e^x \left[-\frac{1}{2} e^{-y} (\sin y + \cos y) \right]_x^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} (e^x (\sin x - \cos x) - e^{-\pi}) - \frac{1}{2} e^x (-e^{-\pi} - e^{-x} (\sin x + \cos x)) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sin x - \cos x) - e^{-x} e^{-\pi} + e^x e^{-\pi} + (\sin x + \cos x) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2 \sin x + e^{-\pi} (e^x - e^{-x}) \} = \sin x + e^{-\pi} \operatorname{Sh} x.\end{aligned}$$

Simmetrizzando dispari si ha:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \text{per } |x| \leq \pi & \sin x + e^{-\pi} \operatorname{Sh} x \\ \text{per } |x| > \pi & \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|} \operatorname{Sh} \pi \end{cases}$$

Grafico di f, g e $f * g$:



3. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 6}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\hat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

a quali spazi funzionali appartiene \hat{f} ($L^p, C^0 \dots$); se \hat{f} è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se \hat{f} è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà \hat{f} ; con che velocità tenderà a zero \hat{f} . Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi \hat{f} e riscrivere l'espressione trovata per $\hat{f}(\xi)$ nella forma più semplice.

a. $f \in L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C_*^0(\mathbb{R})$; f è reale pari, quindi \widehat{f} è reale e pari; f è infinitamente derivabile, quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^n)$ per ogni n , per $\xi \rightarrow \pm\infty$. Poiché \widehat{f} è continua e tende a zero più rapidamente di ogni potenza, sarà anche $\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

$x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ma $x^3 f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ ma ci aspettiamo non sarà $C^3(\mathbb{R})$.

b.

$$z^4 + 5z^2 + 6 = (z^2 + 2)(z^2 + 3) = 0 \text{ per } z = \pm i\sqrt{2}, z = \pm i\sqrt{3},$$

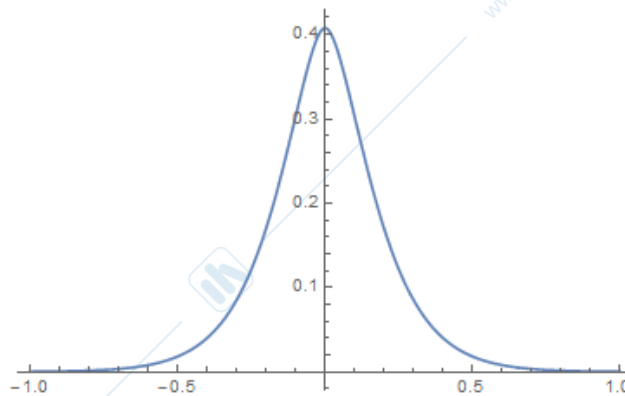
tutti poli del prim'ordine. Poiché \widehat{f} è pari calcoliamola per $\xi < 0$, poi simmetrizzeremo.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{x^4 + 5x^2 + 6} dx \\ &= 2\pi i \left\{ \text{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z^4 + 5z^2 + 6}, i\sqrt{2} \right) + \text{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z^4 + 5z^2 + 6}, i\sqrt{3} \right) \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{4z^3 + 10z} \right)_{/z=i\sqrt{2}} + \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{4z^3 + 10z} \right)_{/z=i\sqrt{3}} \right\} \\ &= \pi i \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z(2z^2 + 5)} \right)_{/z=i\sqrt{2}} + \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z(2z^2 + 5)} \right)_{/z=i\sqrt{3}} \right\} \\ &= \pi i \left\{ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}\xi}}{\sqrt{2}i} + \frac{e^{2\pi\sqrt{3}\xi}}{-i\sqrt{3}} \right\} = \pi \left\{ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}\xi}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{2\pi\sqrt{3}\xi}}{\sqrt{3}} \right\} \end{aligned}$$

essendo $\xi < 0$

$$= \pi \left\{ \frac{e^{-2\pi\sqrt{2}|\xi|}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-2\pi\sqrt{3}|\xi|}}{\sqrt{3}} \right\},$$

espressione che così simmetrizzata vale per ogni ξ .



Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Prima prova in itinere. Aprile 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1.

B. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty)$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**.

Risposta: v. libro di testo, §2.4.

C. (6 punti). Si considerino i seguenti spazi di funzioni:

$$C^0[a, b], C^0(a, b), C^0(\mathbb{R}), C_*^0(\mathbb{R}), C_0^0(\mathbb{R}), C^1[a, b], C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ L^p(\mathbb{R}) \text{ per } p \in [1, \infty], L^p(\mathbb{R}) \text{ per } p \in (0, 1).$$

Di ciascuno di questi si dica se è uno spazio vettoriale, uno spazio vettoriale normato (con quale o quali norme), uno spazio vettoriale normato completo (con quale norma), giustificando le proprie affermazioni. Si precisi anche quali inclusioni valgono eventualmente tra questi spazi.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1, 1.2.2, 1.2.5, 2.4.

D. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (in particolare, elencando gli assiomi di prodotto scalare), si enunciino la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la proprietà che consente di definire una norma, e l'uguaglianza del parallelogramma. Si dia la definizione di spazio pre-hilbertiano e spazio di Hilbert, e si facciano esempi di spazi di Hilbert e di spazi pre-hilbertiani che non sono di Hilbert. Si enunciino e **dimostrino** le proprietà di continuità della norma e del prodotto scalare.

Risposta: v. libro di testo, §4.1, 4.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^0(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^5(\mathbb{R})$ e $g \in L^{5/3}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^0(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^1(\mathbb{R})$

a. Vero. Poiché $f \in L^2(\mathbb{R})$, anche $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \subset L_{loc}^2(\mathbb{R}) \subset L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Poiché g è limitata e nulla fuori da un certo intervallo $[a, b]$, sui cui \widehat{f} è integrabile,

$$\int_{\mathbb{R}} |(\widehat{f} \cdot g)(x)| dx = \int_a^b |(\widehat{f} \cdot g)(x)| dx \leq \|g\|_{C^0} \int_a^b |\widehat{f}(x)| dx < \infty.$$

b. Vero. Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $\widehat{f} \in C_*^0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$; poiché $g \in L^2(\mathbb{R})$ anche $\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ perciò

$$|\widehat{f} \cdot \widehat{g}(x)| \leq \|\widehat{f}\|_{C^0} |\widehat{g}(x)| \in L^2(\mathbb{R})$$

c. Falso. Per ottenere che il prodotto $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$ dovremmo sapere (disuguaglianza di Hölder) che f, g appartengono in spazi L^p, L^q con esponenti coniugati. Poiché $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \neq 1$, gli esponenti non sono coniugati. Poiché tra spazi $L^p(\mathbb{R})$ non valgono inclusioni banali, a priori f, g stanno *solo* negli spazi detti, e l'argomentazione non può essere migliorata per concludere che $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$.

d. Vero. Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^0(\mathbb{R})$ allora $f \cdot g \in C_0^0(\mathbb{R})$. Una funzione continua e nulla fuori da un intervallo limitato è limitata e nulla fuori da un intervallo limitato. Perciò sta in ogni spazio $L^p(\mathbb{R})$ ($p \in [1, \infty]$).

e. Falso. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ anche $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Alla convoluzione di due funzioni L^2 non può essere applicata la disuguaglianza di Young e non c'è modo di concludere che $\widehat{f} * g \in L^1(\mathbb{R})$. Contresemplio: se

$$\widehat{f}(x) = g(x) = \frac{1}{1+|x|} \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$(\widehat{f} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x-y|} \frac{1}{1+|y|} dy.$$

Ora, quest'integrale converge ma non definisce una funzione L^1 perché per il teorema di Fubini-Tonelli (applicabile perché l'integranda è positiva),

$$\int_{\mathbb{R}} (\widehat{f} * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|y|} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x-y|} \right) dy$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x-y|} = +\infty \text{ per ogni } y.$$

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x) \cos x; \quad g(x) = e^{-|x|}$$

a. Prima di calcolare la convoluzione, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita, per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * g$ è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua.

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ (riportando ordinatamente il procedimento e i passi importanti del calcolo) e *semplificare l'espressione ottenuta*.

a. Poiché (in particolare) $f \in L^1(\mathbb{R})$ (in realtà sta in ogni spazio $L^p(\mathbb{R})$) e $g \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$, per il teorema di Young, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Poiché f è pari e g è pari, sarà $f * g$ pari. Poiché

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|x-y|} \cos y dy,$$

l'integranda è continua rispetto a x e

$$\left| e^{-|x-y|} \cos y \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(y) \right| \leq \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(y) \in L^1(\mathbb{R}),$$

per il teorema di continuità degli integrali dipendenti da un parametro la convoluzione è continua.

b.

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|x-y|} \cos y dy.$$

Poiché $f * g$ è pari calcoliamo la convoluzione per $x > 0$, poi simmetrizzeremo.

Per discutere il modulo distinguiamo i casi:

Se $x > \frac{\pi}{2}$ è sempre $y \leq x$, quindi

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x+y} \cos y dy = e^{-x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^y \cos y dy.$$

Se $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ allora spezziamo l'integrale:

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x e^{-x+y} \cos y dy + \int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{-x-y} \cos y dy = e^{-x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^x e^y \cos y dy + e^{-x} \int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{-y} \cos y dy.$$

Calcoliamo ora le primitive di $e^{\pm y} \cos y$. Si trova:

$$\int e^y \cos y dy = \frac{1}{2} e^y (\sin y + \cos y) + c$$

$$\int e^{-y} \cos y dy = \frac{1}{2} e^{-y} (\sin y - \cos y) + c.$$

Quindi: se $x > \frac{\pi}{2}$,

$$(f * g)(x) = e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^y (\sin y + \cos y) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} e^{-x} (e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}) = e^{-x} \operatorname{Ch} \frac{\pi}{2}.$$

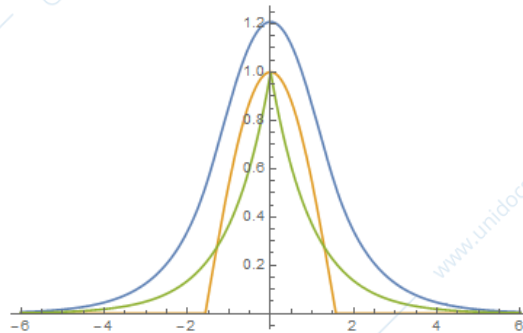
Se $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^y (\sin y + \cos y) \right]_{-\pi/2}^x + e^x \left[\frac{1}{2} e^{-y} (\sin y - \cos y) \right]_x^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} (e^x (\sin x + \cos x) + e^{-\pi/2}) + \frac{1}{2} e^x (e^{-\pi/2} - e^{-x} (\sin x - \cos x)) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin x + \cos x + e^{-x} e^{-\pi/2} + e^x e^{-\pi/2} - \sin x + \cos x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \cos x + (e^x + e^{-x}) e^{-\pi/2} \right\} = \cos x + e^{-\frac{\pi}{2}} \operatorname{Ch} x. \end{aligned}$$

Simmetrizzando pari si ha:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \text{per } |x| \leq \frac{\pi}{2} & \cos x + e^{-\frac{\pi}{2}} \operatorname{Ch} x \\ \text{per } |x| > \frac{\pi}{2} & e^{-|x|} \operatorname{Ch} \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Grafico di f, g e $f * g$:



3. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 5ix - 6)^2}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\hat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

a quali spazi funzionali appartiene \hat{f} ($L^p, C^0 \dots$); se \hat{f} è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se \hat{f} è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà \hat{f} ; con che velocità tenderà a zero \hat{f} . Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi \widehat{f} e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ nella forma più semplice.

a. $f \in L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C_*^0(\mathbb{R})$; f non è né pari né dispari, quindi \widehat{f} non avrà simmetrie né sarà (a priori) reale o immaginaria pura; f è infinitamente derivabile, quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/|\xi|^n)$ per ogni n , per $\xi \rightarrow \pm\infty$. Poiché \widehat{f} è continua e tende a zero più rapidamente di ogni potenza, sarà anche $\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

$x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ma $x^3 f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ ma ci aspettiamo non sarà $C^3(\mathbb{R})$.

b.

$$(z^2 - 5iz - 6)^2 = (z - 2i)^2 (z - 3i)^2 = 0 \text{ per } z = 2i, z = 3i,$$

poli del second'ordine, entrambi nel semipiano $\text{Im } z > 0$. Perciò

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{(x^2 - 5ix - 6)^2} dx \\ &= \begin{cases} \xi > 0 & 0 \\ \xi < 0 & 2\pi i \left\{ \text{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{(z-2i)^2(z-3i)^2}, 2i \right) + \text{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{(z-2i)^2(z-3i)^2}, 3i \right) \right\} \end{cases} \\ &= 2\pi i \chi_{(-\infty, 0)}(x) \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{(z-3i)^2} \right)' \Big|_{z=2i} + \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{(z-2i)^2} \right)' \Big|_{z=3i} \right\} \\ &= 2\pi i \chi_{(-\infty, 0)}(x) \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi} - 2\pi i \xi (z-3i)^2 - 2(z-3i)}{(z-3i)^4} \right) \Big|_{z=2i} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi} - 2\pi i \xi (z-2i)^2 - 2(z-2i)}{(z-2i)^4} \right) \Big|_{z=3i} \right\} \\ &= 2\pi i \chi_{(-\infty, 0)}(x) \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi} - 2\pi i \xi (z-3i) - 2}{(z-3i)^3} \right) \Big|_{z=2i} + \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi} - 2\pi i \xi (z-2i) - 2}{(z-2i)^3} \right) \Big|_{z=3i} \right\} \\ &= 2\pi i \chi_{(-\infty, 0)}(x) \left\{ \left(e^{4\pi \xi} \frac{-2\pi \xi - 2}{i} \right) + \left(e^{6\pi \xi} \frac{2\pi \xi - 2}{-i} \right) \right\} \\ &= -4\pi \chi_{(-\infty, 0)}(x) \{ e^{4\pi \xi} (\pi \xi + 1) + e^{6\pi \xi} (\pi \xi - 1) \} \end{aligned}$$

