

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Terzo appello. Gennaio 2020
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

B. Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi pre-hilbertiani per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

C. Enunciare e dimostrare il principio di indeterminazione di Heisenberg nel contesto della trasformata di Fourier su \mathbb{R} . Quindi, esibire un esempio di funzione per cui vale il segno di uguale nella disuguaglianza, dimostrando questa affermazione.

D. Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di *distribuzione a supporto compatto* e di *convoluzione di distribuzioni*, sotto opportune ipotesi. Fare esempi di classi di distribuzioni a supporto compatto. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile). Infine, illustrare l'utilizzo dei risultati precedenti in relazione al concetto di *soluzione fondamentale* dell'operatore di Laplace in \mathbb{R}^3 .

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Sia

$$f(x) = x^2 e^{-x} \chi_{(0, +\infty)}(x).$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \widehat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: \widehat{f} eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene \widehat{f} (C_*^0 , L^1 , L^2 , $\mathcal{S} \dots$), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare \widehat{f} utilizzando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier. Verificare che \widehat{f} ha effettivamente le proprietà previste.

2. (6 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t) + \frac{1}{C} \left(q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

dove $i(0) = 0$, $q_0 = 3$, $L = 4$, $C = 0.5$. Si richiede di:

a. Risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

b. Si consideri ora il caso $v(t) = \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})}(t)$. Calcolare esplicitamente la soluzione in questo caso, semplificando il più possibile l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). Si consideri l'espressione distribuzionale:

$$T = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_k.$$

Dopo aver opportunamente semplificato l'espressione di T in base alle proprietà delle distribuzioni:

a. Si dimostri che T definisce una distribuzione temperata.

b. Si calcoli \widehat{T} .

c. Si calcoli T' ; quindi si scriva esplicitamente l'espressione analitica di $\langle T', \phi \rangle$ per $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(Nei punti b e c si chiede, per ciascuna richiesta, di scrivere l'espressione richiesta nella forma più semplice possibile).

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Terzo appello. Gennaio 2020
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

[Risposta: v. libro di testo, §2.5-2.6].

B. Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi pre-hilbertiani per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

[Risposta: v. libro di testo, §4.1-4.2].

C. Enunciare e dimostrare il principio di indeterminazione di Heisenberg nel contesto della trasformata di Fourier su \mathbb{R} . Quindi, esibire un esempio di funzione per cui vale il segno di uguale nella disuguaglianza, dimostrando questa affermazione.

[Risposta: v. libro di testo, §7.4.3.1].

D. Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di *distribuzione a supporto compatto* e di *convoluzione di distribuzioni*, sotto opportune ipotesi. Fare esempi di classi di distribuzioni a supporto compatto. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile). Infine, illustrare l'utilizzo dei risultati precedenti in relazione al concetto di *soluzione fondamentale* dell'operatore di Laplace in \mathbb{R}^3 .

[Risposta: v. libro di testo, §9.3-9.4].

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Sia

$$f(x) = x^2 e^{-x} \chi_{(0, +\infty)}(x).$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \widehat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: \widehat{f} eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene \widehat{f} (C_*^0 , L^1 , L^2 , $\mathcal{S}...$), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare \widehat{f} utilizzando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier. Verificare che \widehat{f} ha effettivamente le proprietà previste.

a. f non è né pari né dispari, quindi \widehat{f} non avrà simmetrie. $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n = 1, 2, 3$, quindi $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$f \in C^1(\mathbb{R})$ con f' regolare a tratti. Infatti, per $x > 0$ si ha: $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$; $f'(0^+) = 0$; $f''(x) = e^{-x}(2 - 4x + x^2)$; $f''(0^+) = 2$. Quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^2)$ per $\xi \rightarrow \infty$. Di conseguenza $\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

b. Sia prima $g(x) = e^{-x} \chi_{(0, +\infty)}(x)$. Si ha

$$\widehat{g}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[\frac{e^{-x-2\pi i x \xi}}{-1-2\pi i \xi} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+2\pi i \xi}.$$

Ora $f(x) = x^2 g(x)$ e ricordando la formula

$$\mathcal{F}(x^2 g(x))(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \widehat{g}(\xi)$$

possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{1+2\pi i \xi} \right) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{d\xi} \left(-\frac{2\pi i}{(1+2\pi i \xi)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi i \cdot 2 \cdot 2\pi i}{(1+2\pi i \xi)^3} \right) = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{-8\pi^2}{(1+2\pi i \xi)^3} \right) = \frac{2}{(1+2\pi i \xi)^3} \end{aligned}$$

che effettivamente è $C^\infty(\mathbb{R})$ e $o(1/\xi^2)$ per $\xi \rightarrow \infty$.

2. (6 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t) + \frac{1}{C} \left(q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

dove $i(0) = 0$, $q_0 = 3$, $L = 4$, $C = 0.5$. Si richiede di:

a. Risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

b. Si consideri ora il caso $v(t) = \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})}(t)$. Calcolare esplicitamente la soluzione in questo caso, semplificando il più possibile l'espressione ottenuta.

a. Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di Laplace di $i(t), v(t)$, rispettivamente, si ha:

$$4i'(t) + 2 \left(3 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

$$4(sI(s) - i(0)) + 2 \left(\frac{3}{s} + \frac{I(s)}{s} \right) = V(s)$$

$$I(s) \left(4s + \frac{2}{s} \right) = V(s) - \frac{6}{s}$$

$$I(s) \left(\frac{4s^2 + 2}{s} \right) = V(s) - \frac{6}{s}$$

$$I(s) = \left(\frac{s}{4s^2 + 2} \right) V(s) - \frac{3}{2s^2 + 1} \equiv H(s) V(s) + G(s).$$

Ora:

$$H(s) = \frac{s}{4s^2 + 2} = \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{2}} = \mathcal{L} \left(\frac{1}{4} \cos \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$G(s) = -\frac{3}{2s^2 + 1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{s^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \mathcal{L} \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

$$I(s) = \mathcal{L}(v * h + g)(s)$$

$$i(t) = (v * h)(t) + g(t)$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{4} \int_0^t \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) f(\tau) d\tau.$$

b. Calcoliamo la convoluzione

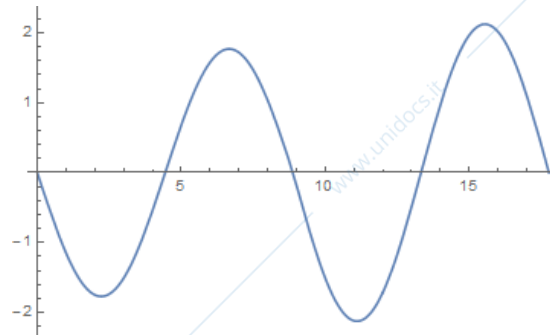
$$J(t) = \int_0^t \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})} d\tau$$

$$= \begin{cases} \text{se } t < 2\pi\sqrt{2} & \int_0^t \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) d\tau = \int_0^t \cos \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) d\tau = \left[\sqrt{2} \sin \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^t = \sqrt{2} \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \\ \text{se } t > 2\pi\sqrt{2} & \int_0^{2\pi\sqrt{2}} \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) d\tau = \left[-\sqrt{2} \sin \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{2\pi\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\pi \right) - \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right) = 0 \end{cases}$$

Perciò

$$i(t) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})}(t)$$

$$= \begin{cases} \text{se } t < 2\pi\sqrt{2} & \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{se } t > 2\pi\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} = \begin{cases} \text{se } t < 2\pi\sqrt{2} & -\frac{5}{4}\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{se } t > 2\pi\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$



3. (5 punti). Si consideri l'espressione distribuzionale:

$$T = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_k.$$

Dopo aver opportunamente semplificato l'espressione di T in base alle proprietà delle distribuzioni:

- Si dimostri che T definisce una distribuzione temperata
- Si calcoli \hat{T} .
- Si calcoli T' ; quindi si scriva esplicitamente l'espressione analitica di $\langle T', \phi \rangle$ per $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(Nei punti b e c si chiede, per ciascuna richiesta, di scrivere l'espressione richiesta nella forma più semplice possibile).

Anzitutto si ha:

$$T = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^2 k \delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \delta_k.$$

a. Per $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\begin{aligned} |\langle T, \phi \rangle| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \phi(k) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^3 |\phi(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \{k^5 |\phi(k)|\} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^5) |\phi(x)| = c \cdot p_5^{(0)}(\phi) \end{aligned}$$

e per un criterio visto, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

b. Si ha, per le proprietà delle serie di distribuzioni temperate:

$$\hat{T} = \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \delta_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \mathcal{F}(\delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-2\pi i k \xi}.$$

c. Si ha, per le proprietà delle serie di distribuzioni:

$$T' = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \delta'_k$$

e in particolare

$$\langle T', \phi \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \delta'_k, \phi \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \langle \delta'_k, \phi \rangle = - \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \phi'(k).$$