

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Prima prova in itinere. Maggio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a, b])$ è di Banach.

B. (6 punti). In un generico spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, illustrare come si definisce l'integrale, prima per una funzione misurabile positiva e poi per una funzione di segno qualunque o a valori complessi. Richiamare le definizioni dei principali concetti coinvolti. Enunciare quindi le proprietà elementari dell'integrale in questo contesto (linearità, monotonia...).

C. (6 punti). Enunciare il teorema della convergenza monotona il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue e fare esempi di applicazioni. Enunciare quindi i teoremi di integrazione per serie che valgono per l'integrale di Lebesgue.

D. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in spazi di Hilbert, rispetto a un s.o.n.c.

Svolgere i seguenti esercizi**1. (5 punti).** Si consideri la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n+x}{n\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2(1+(\frac{x}{n})^2)} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- Determinare il limite puntuale f per $n \rightarrow \infty$.
 - Dire se $f_n \in L^1(0, +\infty)$ per ogni n e se $f \in L^1(0, +\infty)$.
 - Stabilire se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $(0, +\infty)$.
 - Stabilire se $f_n \rightarrow f$ in $L^1(0, +\infty)$.
- Ogni risposta va opportunamente giustificata.

2. (5 punti). Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-|y|(x^2+1)} dy.$$

- Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in [1, \infty]$ e p, q esponenti coniugati. Si richiede di trattare separatamente i 3 casi: $p = 1, p = \infty, p \in (1, \infty)$ e di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$ con una stima esplicita della costante c .

- Calcolare esplicitamente Tf per $f = \chi_{(-1,1)}(x)$ verificando che la funzione Tf trovata appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

3. (5 punti).

- Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \cos x dx)$ le funzioni $1, x$.

Si richiede di procedere ordinatamente, calcolando anzitutto gli integrali $I_k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^k \cos x dx$ per $k = 0, 1, 2$, e successivamente calcolando i vari integrali che occorrono riconducendosi a questi integrali notevoli (e non facendo ogni volta un calcolo indipendente). Prestare anche attenzione alle simmetrie (integrali di funzioni pari o dispari), sfruttandole per semplificare i calcoli.

- Determinare la retta $y = ax + b$ che meglio approssima la funzione $y = \sin x$ nello spazio $L^2((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \cos x dx)$.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Prima prova in itinere. Maggio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

B. (6 punti). “Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura”. Si spieghi cosa significa, cioè si dica cosa sono Ω, \mathcal{M}, μ , definendo in dettaglio i concetti coinvolti di sigma algebra e misura. Enunciare quindi dettagliatamente il teorema che afferma l'esistenza della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue proprietà.

C. (6 punti). Si dia la definizione di *funzionale lineare continuo* su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso e si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx+1}{n\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2(1+nx^2)} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- Determinare il limite puntuale f per $n \rightarrow \infty$.
 - Dire se $f_n \in L^1(0, +\infty)$ per ogni n e se $f \in L^1(0, +\infty)$.
 - Stabilire se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $(0, +\infty)$, in $(1, +\infty)$
 - Stabilire se $f_n \rightarrow f$ in $L^1(0, +\infty)$.
- Ogni risposta va opportunamente giustificata.

2. (5 punti). Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+(x-y)^2} f(y) dy.$$

- Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in [1, \infty]$.

Si richiede di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_p \leq c\|f\|_1$ con una stima esplicita della costante c nel caso $p = 2$ e $p = \infty$.

- Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in [1, \infty]$.

3. (5 punti).

- Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2((0, \pi), \sin x dx)$ le funzioni $1, x$.

Si richiede di procedere ordinatamente, calcolando anzitutto gli integrali $I_k = \int_0^\pi x^k \sin x dx$ per $k = 0, 1, 2$, e successivamente calcolando i vari integrali che occorrono riconducendosi a questi integrali notevoli (e non facendo ogni volta un calcolo indipendente). Prestare anche attenzione alle simmetrie (integrali di funzioni pari o dispari), sfruttandole per semplificare i calcoli.

- Determinare la retta $y = ax + b$ che meglio approssima la funzione $y = \cos x$ nello spazio $L^2((0, \pi), \sin x dx)$.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Prima prova in itinere. Maggio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a, b])$ è di Banach.

Risposta: v. dispensa del corso, §1.2

B. (6 punti). In un generico spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, illustrare come si definisce l'integrale, prima per una funzione misurabile positiva e poi per una funzione di segno qualunque o a valori complessi. Richiamare le definizioni dei principali concetti coinvolti. Enunciare quindi le proprietà elementari dell'integrale in questo contesto (linearità, monotonia...).

Risposta: v. dispensa del corso, §2.3.1.

C. (6 punti). Enunciare il teorema della convergenza monotona il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue e fare esempi di applicazioni. Enunciare quindi i teoremi di integrazione per serie che valgono per l'integrale di Lebesgue.

Risposta: v. dispensa del corso, §2.3.3.

D. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in spazi di Hilbert, rispetto a un s.o.n.c.

Risposta: v. dispensa del corso, §4.3

Svolgere i seguenti esercizi**1. (5 punti).** Si consideri la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n+x}{n\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2(1+(\frac{x}{n})^2)} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- a. Determinare il limite puntuale f per $n \rightarrow \infty$.
 b. Dire se $f_n \in L^1(0, +\infty)$ per ogni n e se $f \in L^1(0, +\infty)$.
 c. Stabilire se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $(0, +\infty)$.
 d. Stabilire se $f_n \rightarrow f$ in $L^1(0, +\infty)$.
 Ogni risposta va opportunamente giustificata.

a.

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- b. $f_n(x) \sim \frac{n}{n\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0$, integrabile;
 $f_n(x) \sim \frac{1}{x^2(\frac{x}{n})^2} = \frac{n^2}{x^4}$ per $x \rightarrow +\infty$, integrabile, quindi $f_n \in L^1(0, +\infty)$
 $f \in L^1(0, +\infty)$.
 c. Per $x \in (0, 1)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n+x}{n\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \frac{n+x}{n} - 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{x}{n} = \frac{\sqrt{x}}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Per $x \geq 1$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{x^2(1+(\frac{x}{n})^2)} - \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} \left| \frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2} - 1 \right|$$

$$= \frac{1}{x^2} \frac{(\frac{x}{n})^2}{1+(\frac{x}{n})^2} \leq \frac{1}{x^2} \frac{(\frac{x}{n})^2}{1} = \frac{1}{n^2}$$

$$\sup_{x \in (1, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

e complessivamente

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

C'è convergenza uniforme su $(0, +\infty)$.d. Cerchiamo la maggiorante integrabile indipendente da n per applicare il teorema di Lebesgue.Per $x \in (0, 1)$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{n+1}{n\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \in L^1(0, 1).$$

perché

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n} &\leq 2 \text{ in quanto} \\ n+1 &\leq 2n \\ n &\geq 1.\end{aligned}$$

Per $x \in (1, +\infty)$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} \in L^1(1, +\infty)$$

quindi

$$|f_n(x)| \leq g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e $g \in L^1(0, +\infty)$. Perciò il teorema di Lebesgue è applicabile, e concludiamo che $f_n \rightarrow f$ in $L^1(0, +\infty)$.

2. (5 punti). Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-|y|(x^2+1)} dy.$$

a. Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in [1, \infty]$ e p, q esponenti coniugati. Si richiede di trattare separatamente i 3 casi: $p = 1, p = \infty, p \in (1, \infty)$ e di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$ con una stima esplicita della costante c .

b. Calcolare esplicitamente Tf per $f = \chi_{(-1,1)}(x)$ verificando che la funzione Tf trovata appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

a. Per la disuguaglianza di Hölder si ha, per $p \in (1, \infty)$:

$$\begin{aligned}|Tf(x)| &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-q|y|(x^2+1)} dy \right)^{1/q} \\ |Tf(x)|^q &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^q 2 \int_0^{+\infty} e^{-qy(x^2+1)} dy = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^q 2 \left[\frac{e^{-qy(x^2+1)}}{-q(x^2+1)} \right]_0^{+\infty} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^q \frac{2}{q(x^2+1)} \\ \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q dx &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^q \frac{2}{q} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+1} dx = \frac{2\pi}{q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^q \\ \|Tf\|_{L^q(\mathbb{R})} &\leq \left(\frac{2\pi}{q} \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Per $p = 1, q = \infty$

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\|Tf\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Per $p = \infty, q = 1$

$$|Tf(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|(x^2+1)} dy = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{2}{x^2+1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)| dx \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{x^2+1} dx = 2\pi \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\|Tf\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\pi \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

b. Calcoliamo Tf per $f = \chi_{(-1,1)}(x)$.

$$Tf(x) = \int_{-1}^1 e^{-|y|(x^2+1)} dy = 2 \int_0^1 e^{-y(x^2+1)} dy = 2 \left[\frac{e^{-y(x^2+1)}}{-(x^2+1)} \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - e^{-(x^2+1)}}{x^2+1}.$$

La funzione è continua e limitata in \mathbb{R} , in particolare appartiene a $L^\infty(\mathbb{R})$ e qualsiasi sua potenza a esponente $p \geq 1$ è integrabile al finito. Inoltre per $x \rightarrow \infty$ è asintotica a $\frac{2}{x^2+1}$, che elevata a qualsiasi potenza $p \geq 1$ è integrabile. Pertanto $Tf \in L^p(\mathbb{R})$ anche per ogni $p \in [1, \infty)$.

3. (5 punti).

a. Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x dx$ le funzioni $1, x$.

Si richiede di procedere ordinatamente, calcolando anzitutto gli integrali $I_k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^k \cos x dx$ per $k = 0, 1, 2$, e successivamente calcolando i vari integrali che occorrono riconducendosi a questi integrali notevoli (e non facendo ogni volta un calcolo indipendente). Prestare anche attenzione alle simmetrie (integrali di funzioni pari o dispari), sfruttandole per semplificare i calcoli.

b. Determinare la retta $y = ax + b$ che meglio approssima la funzione $y = \sin x$ nello spazio $L^2\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x dx$.

Sia

$$I_k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^k \cos x dx.$$

Per simmetria, $I_k = 0$ per k dispari. Calcoliamo anzitutto

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = 2 [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4 \left\{ [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \right\} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2I_0 = \frac{\pi^2}{2} - 4 \end{aligned}$$

Ortonormalizziamo ora i vettori.

$$e_1 = \text{vers}(1).$$

$$\|1\|^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(x, e_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x dx = 0 \text{ per simmetria.}$$

$$e_2 = \text{vers}(x)$$

$$\|x\|^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = I_2 = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

$$e_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}}.$$

b. Dobbiamo proiettare $f(x) = \sin x$ sullo spazio generato da e_1, e_2 .

$$(\sin x, e_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x dx = 0 \text{ per simmetria}$$

$$(\sin x, e_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \cos x dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx.$$

Calcoliamo

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx = \left[-x \frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

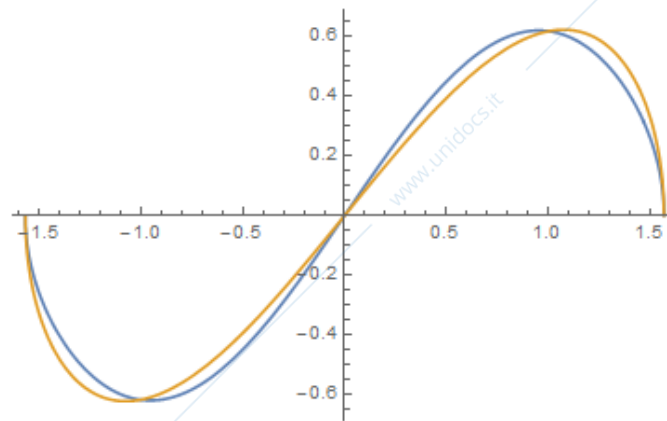
Quindi

$$(\sin x, e_2) = \frac{\pi}{4\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}}$$

e la proiezione cercata è

$$Pf(x) = (\sin x, e_2) e_2 = \frac{\pi}{4\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right)} x = \frac{\pi}{2\pi^2 - 16} x$$

Rappresentiamo il grafico di $\sin x \sqrt{\cos x}$ e $\frac{\pi}{2\pi^2 - 16} x \sqrt{\cos x}$ per visualizzare l'approssimazione nella norma considerata:



Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
 Prima prova in itinere. Novembre 2016
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

Risposta: v. dispensa del corso, §1.2.1

B. (6 punti). “Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura”. Si spieghi cosa significa, cioè si dica cosa sono Ω, \mathcal{M}, μ , definendo in dettaglio i concetti coinvolti di sigma algebra e misura. Enunciare quindi dettagliatamente il teorema che afferma l'esistenza della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue proprietà.

Risposta: v. dispensa del corso, §2.2

C. (6 punti). Si dia la definizione di *funzionale lineare continuo* su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso e si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

Risposta: v. dispensa del corso, §3.2

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

Risposta: v. dispensa del corso, §4.3

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx+1}{n\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2(1+nx^2)} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- Determinare il limite puntuale f per $n \rightarrow \infty$.
- Dire se $f_n \in L^1(0, +\infty)$ per ogni n e se $f \in L^1(0, +\infty)$.
- Stabilire se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $(0, +\infty)$, in $(1, +\infty)$
- Stabilire se $f_n \rightarrow f$ in $L^1(0, +\infty)$.

Ogni risposta va opportunamente giustificata.

a.

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- $f_n(x) \sim \frac{1}{n\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0$, integrabile;
- $f_n(x) \sim \frac{1}{nx^4}$ per $x \rightarrow +\infty$, integrabile, quindi $f_n \in L^1(0, +\infty)$
 $f \in L^1(0, +\infty)$.
- Per $x \in (0, 1)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx+1}{n\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right| = \frac{1}{n\sqrt{x}}, \text{ illimitata.}$$

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| = +\infty,$$

perciò la convergenza non è uniforme su $(0, 1)$, e quindi a maggior ragione su $(0, +\infty)$.

Per $x \geq 1$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{x^2(1+nx^2)} \right| \leq \frac{1}{x^2} \frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{n} \text{ perché } \frac{1}{x^4} \leq 1,$$

$$\sup_{x \in (1, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

perciò in $(1, +\infty)$ c'è convergenza uniforme.

d. Cerchiamo la maggiorante integrabile indipendente da n per applicare il teorema di Lebesgue.

Per $x \in (0, 1)$,

$$|f_n(x)| = \frac{nx}{n\sqrt{x}} + \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(0, 1).$$

Per $x \in (1, +\infty)$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} \in L^1(1, +\infty)$$

quindi

$$|f_n(x)| \leq g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e $g \in L^1(0, +\infty)$.

2. (5 punti). Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+(x-y)^2} f(y) dy.$$

a. Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in [1, \infty]$.

Si richiede di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_p \leq c\|f\|_1$ con una stima esplicita della costante c nel caso $p = 2$ e $p = \infty$.

b. Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in [1, \infty]$.

a. Detto

$$k(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2},$$

si ha

$$Tf(x) = (k * f)(x).$$

Poiché k è continua e all'infinito è asintotica a $1/|x|^{3/2}$, $k \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$ e per la disuguaglianza di Young si ha

$$\|Tf\|_p = \|k * f\|_p \leq \|f\|_1 \|k\|_p.$$

Calcoliamo ora $\|k\|_p$ per $p = 2$ e $p = \infty$.

$$\begin{aligned} \|k\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} \right)^2 dx \right)^{1/2} = \left(2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \right)^{1/2} \\ &= \left(2 \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_0^{+\infty} \right)^{1/2} = 1 \end{aligned}$$

Per $p = \infty$, dobbiamo trovare il massimo di $|k(x)|$ in \mathbb{R} , quindi per simmetria il massimo di $k(x)$ in $[0, +\infty)$. Un calcolo elementare dà

$$\begin{aligned} k'(x) &= 0 \text{ per } x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \|k\|_\infty &= k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

b. Il caso $p = 1$ è contenuto nel punto precedente. Sia $p \in (1, \infty]$. Per la disuguaglianza di Holder si ha, indicando con q l'esponente coniugato di p ,

$$|Tf(x)| \leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|x-y|^{q/2}}{(1+(x-y)^2)^q} dy \right)^{1/q}$$

per traslazione

$$= \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{q/2}}{(1+y^2)^q} dy \right)^{1/q}$$

L'integranda è continua e all'infinito è asintotica a

$$|y|^{q/2-2q},$$

integrabile per $\frac{q}{2} - 2q < -1$, quindi per ogni $q \in [1, \infty)$, quindi per ogni $p \in (1, \infty]$. Perciò

$$\|Tf\|_{\infty} \leq c \|f\|_p$$

per $p \in (1, \infty]$.

3. (5 punti).

a. Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2((0, \pi), \sin x dx)$ le funzioni $1, x$.

Si richiede di procedere ordinatamente, calcolando anzitutto gli integrali $I_k = \int_0^{\pi} x^k \sin x dx$ per $k = 0, 1, 2$, e successivamente calcolando i vari integrali che occorrono riconducendosi a questi integrali notevoli (e non facendo ogni volta un calcolo indipendente). Prestare anche attenzione alle simmetrie (integrali di funzioni pari o dispari), sfruttandole per semplificare i calcoli.

b. Determinare la retta $y = ax + b$ che meglio approssima la funzione $y = \cos x$ nello spazio $L^2((0, \pi), \sin x dx)$.

Sia

$$I_k = \int_0^{\pi} x^k \sin x dx.$$

Calcoliamo anzitutto

$$I_0 = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = [-x^2 \cos x]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos x dx \\ &= \pi^2 + 2 \left\{ [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right\} = \pi^2 + 2 \{0 - 2\} \\ &= \pi^2 - 4. \end{aligned}$$

Ortonormalizziamo ora i vettori.

$$e_1 = \text{vers}(1).$$

$$\|1\|^2 = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(x, e_1) = \int_0^\pi x \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}} I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$e_2 = \text{vers}\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \text{vers}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left\|x - \frac{\pi}{2}\right\|^2 = \int_0^\pi \left(x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin x dx = I_2 - \pi I_1 + \frac{\pi^2}{4} I_0$$

$$= (\pi^2 - 4) - \pi^2 + \frac{\pi^2}{4} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

$$e_2 = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}}.$$

b. Dobbiamo proiettare $f(x) = \cos x$ sullo spazio generato da e_1, e_2 .

$$(\cos x, e_1) = \int_0^\pi \cos x \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\pi \sin(2x) dx = 0$$

$$(\cos x, e_2) = \int_0^\pi \cos x \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \sin x dx = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \left\{ \int_0^\pi x \sin 2x dx - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \left\{ \left[-x \frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{2} dx - \frac{\pi}{2} \cdot 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \left\{ -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 \right\} = -\frac{\pi}{4\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}}$$

Quindi la proiezione cercata è

$$Pf(x) = (\cos x, e_2) e_2 = -\frac{\pi}{4\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}} = -\frac{\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2\pi^2 - 16}$$

Rappresentiamo il grafico di $\cos x \sqrt{\sin x}$ e $-\frac{\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2\pi^2 - 16} \sqrt{\sin x}$ per visualizzare

l'approssimazione nella norma considerata:

