Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Seconda prova in itinere. Giugno 2019
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione; trasformata e dilatazioni. **Dimostrare** quindi le formule delle derivate (è richiesto solo il caso di derivata prima e funzioni di una variabile).

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata prima e derivata n-esima di una funzione (per la derivata, è richiesta la dim. solo nel caso della derivata prima, ma l'enunciato preciso anche per la derivata n-esima).

C. (6 punti). Le formule per il *calcolo della derivata* della traslata, dilatata, riflessa di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e per il prodotto gT con g funzione regolare: enunciarle e **dimostrarle**.

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Fare esempi di classi di distribuzioni temperate, **dimostrando qualcuna delle affermazioni fatte**. Infine, dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 2, C = 3, q_0 = 5$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = \chi_{(1,+\infty)}(t)$.

2. (5 punti).

a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'espressione il più possibile esplicita e semplificata della distribuzione:

$$T = \tau_2\left[\left(D_{\frac{1}{2}}\left(x^2\delta_2\right)\right)'\right].$$

(Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $T = ...$ e NON $\langle T, \phi\rangle = ...$).

b. Calcolare la derivata distribuzionale $(T_f)'$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \arctan\frac{1}{x-1},$$

giustificando il procedimento seguito.

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^4 - ix^2 + 5}{x^2 + i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Prima prova in itinere. Giugno 2019
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier e **dimostrarne** alcune significative.

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della convoluzione, la formula del t-shift e dell's-shift per la $\mathcal{L}$-trasformata.

C. (6 punti). Derivata di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Arrivare alla definizione di questo concetto in modo che nel caso particolare di distribuzioni indotte da funzioni $C^1(\mathbb{R})$ la derivata distribuzionale coincida con la derivata classica e dimostrare che la derivata di una distribuzione è effettivamente una distribuzione. Mostrare poi come dalla definizione segue la formula di calcolo per la derivata n-esima di una distribuzione. Infine, fare un esempio di funzione localmente integrabile la cui derivata distribuzionale non è una funzione, dimostrando l'affermazione fatta.

D. (6 punti). Dare la definizione di limite di una successione di distribuzioni, somma di una serie di distribuzioni, e fare esempi di queste operazioni. **Dimostrare** il risultato sullo scambio di limite (o serie) di distribuzioni e derivazione. Infine, nel caso di una successione di distribuzioni temperate, enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo della trasformata di Fourier del limite della successione, o della somma della serie.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri\,(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i\,(\tau)\,d\tau\right) = v\,(t)$$

con $R = 3, C = 2, q_0 = 5$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i\,(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v\,(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i\,(t)$ nel caso $v\,(t) = \chi_{(0,1)}\,(t)$.

2. (5 punti).
a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'\,(\mathbb{R})$, l'espressione il più possibile esplicita e semplificata della distribuzione:

$$T = \tau_{\frac{1}{3}}\left[\left(D_3\left(x^2\delta_3\right)\right)'\right].$$

(Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $T = ...$ e NON $\langle T, \phi\rangle = ...$).
b. Calcolare la derivata distribuzionale $(T_f)'$ della funzione

$$f\,(x) = \sqrt[3]{|x|} + \arctan\frac{1}{x+1},$$

giustificando il procedimento seguito.

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f\,(x) = \frac{2x^4 + 5ix^2 - 3}{x^2 + i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Prima prova in itinere. Giugno 2019
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione; trasformata e dilatazioni. **Dimostrare** quindi le formule delle derivate (è richiesto solo il caso di derivata prima e funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata prima e derivata n-esima di una funzione (per la derivata, è richiesta la dim. solo nel caso della derivata prima, ma l'enunciato preciso anche per la derivata n-esima).

Risposta: v. libro di testo, §8.1-8.2.

C. (6 punti). Le formule per il *calcolo della derivata* della traslata, dilatata, riflessa di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e per il prodotto gT con g funzione regolare: enunciarle e **dimostrarle**.

Risposta: v. libro di testo, §9.2.3.

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Fare esempi di classi di distribuzioni temperate, **dimostrando qualcuna delle affermazioni fatte**. Infine, dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata.

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 2, C = 3, q_0 = 5$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = \chi_{(1,+\infty)}(t)$.

$$2i(t) + \frac{1}{3}\left(5 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di $i(t), v(t)$ rispettivamente si ha:

$$\begin{aligned} 2I(s) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{s} + \frac{I(s)}{s}\right) &= V(s) \\ I(s)\left(2 + \frac{1}{3s}\right) &= V(s) - \frac{5}{3s} \\ I(s) &= \frac{3s}{6s+1}V(s) - \frac{5}{6s+1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{6s+1}\right\}V(s) - \frac{5}{6s+1} \\ &= \frac{1}{2}V(s) - \frac{1}{12\left(s+\frac{1}{6}\right)}V(s) - \frac{5}{6\left(s+\frac{1}{6}\right)} \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}v(t) - \frac{1}{12}e^{-\frac{t}{6}} * v(t) - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}}\right) \end{aligned}$$

quindi

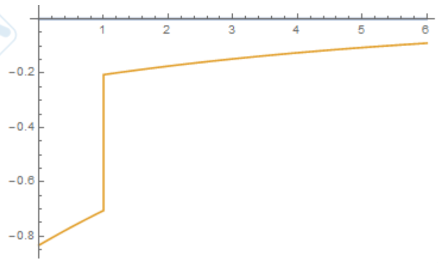
$$i(t) = \frac{1}{2}v(t) - \frac{1}{12}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{6}} v(\tau)\, d\tau - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}}.$$

Per $v(t) = \chi_{(1,+\infty)}(t)$ si ha

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & -\frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \\ \text{se } t \geq 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{12}e^{-\frac{t}{6}}\int_1^t e^{\frac{\tau}{6}} d\tau - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{12}e^{-\frac{t}{6}}\int_1^t e^{\frac{\tau}{6}} d\tau - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}e^{-\frac{t}{6}}6\left(e^{\frac{t}{6}} - e^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{(1-t)}{6}}\right) - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} = \left(e^{\frac{1}{6}} - \frac{5}{3}\right)\frac{e^{-\frac{t}{6}}}{2} \end{aligned}$$

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & -\frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \\ \text{se } t \geq 1 & \left(\frac{e^{\frac{1}{6}}}{2} - \frac{5}{6}\right)e^{-\frac{t}{6}} \end{cases}$$



2. (5 punti).

a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'espressione il più possibile esplicita e semplificata della distribuzione:

$$T = \tau_2 \left[\left(D_{\frac{1}{2}} \left(x^2 \delta_2 \right) \right)' \right].$$

(Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $T = ...$ e NON $\langle T, \phi \rangle = ...$).

b. Calcolare la derivata distribuzionale $(T_f)'$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \arctan \frac{1}{x-1},$$

giustificando il procedimento seguito.

a.

$$x^2 \delta_2 = 4\delta_2$$
$$D_{\frac{1}{2}} \left(x^2 \delta_2 \right) = D_{\frac{1}{2}} (4\delta_2) = 4 \cdot 2 \cdot \delta_4 = 8\delta_4$$
$$\left(D_{\frac{1}{2}} \left(x^2 \delta_2 \right) \right)' = (8\delta_4)' = 8\delta_4'$$
$$\tau_2 \left[\left(D_{\frac{1}{2}} \left(x^2 \delta_2 \right) \right)' \right] = \tau_2 [8\delta_4'] = 8\delta_2'.$$

b. La funzione $\sqrt{|x|}$ è continua con un punto di cuspide; la sua derivata classica,

$$\left(\sqrt{|x|} \right)' = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}}$$

è L^1_{loc} perciò coincide con la derivata distribuzionale.

La funzione $\arctan \frac{1}{x-1}$ è regolare a eccezione di $x = 1$ dove ha una discontinuità a salto:

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \arctan \frac{1}{x-1} = \pm \frac{\pi}{2},$$

quindi il salto è pari a π. Di conseguenza la sua derivata distribuzionale è la somma della derivata classica fuori da 1 e di una $\pi\delta_1$. Complessivamente:

$$\begin{aligned}(T_f)' &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}} + \pi\delta_1 + \frac{1}{1+\frac{1}{(x-1)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}} + \pi\delta_1 - \frac{1}{(x-1)^2+1} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}} + \pi\delta_1 - \frac{1}{x^2-2x+2}.\end{aligned}$$

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^4 - ix^2 + 5}{x^2 + i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria.

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - ix^2 + 5}{x^2 + i} &= \frac{3}{x^2+i} + x^2 - 2i \\ \mathcal{F}(T_f) &= 3\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+i}\right) + \mathcal{F}\left(x^2\right) - 2i\mathcal{F}(1).\end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(1) &= \delta \\ \mathcal{F}\left(x^2\right) &= -\frac{\delta''}{4\pi^2}\end{aligned}$$

e rimane da calcolare, col metodo dei residui, la trasformata della funzione, $g(x) = \frac{1}{x^2+i}$, che è L^1 e pari. Sarà $\widehat{g}$ pari, la calcoliamo perciò per $\xi > 0$.

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+i} e^{-2\pi i \xi x} dx$$

$$z^2 + i = 0; z = \sqrt{-i} = \pm\left(\tfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right), \text{ poli del primo ordine. Per } \xi > 0 \text{ è}$$

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+i} e^{-2\pi i \xi z}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -2\pi i \left(\frac{1}{2z} e^{-2\pi i \xi z}\right)_{/z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\ &= -\pi i \left(e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-2\pi i \xi\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}\right) = -\pi i \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}\pi\xi(i+1)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\pi\xi}(1-i)\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) - i\sin\left(\sqrt{2}\pi\xi\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\pi\xi}\left(\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) - \sin\left(\sqrt{2}\pi\xi\right)\right) - i\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) + \sin\left(\sqrt{2}\pi\xi\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Simmetrizzando pari si ha:

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \left(\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) - \sin\left(\sqrt{2}\pi\,|\xi|\right) \right) - i \left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) + \sin\left(\sqrt{2}\pi\,|\xi|\right) \right) \right)$$

e in definitiva:

$$\widehat{(T_f)} = 3\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \left(\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) - \sin\left(\sqrt{2}\pi\,|\xi|\right) \right) - i \left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) + \sin\left(\sqrt{2}\pi\,|\xi|\right) \right) \right) - \frac{\delta''}{4\pi^2} - 2i\delta.$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Prima prova in itinere. Giugno 2019
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier e **dimostrarne** alcune significative.

Risposta: v. libro di testo, §7.4.1.

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della convoluzione, la formula del t-shift e dell's-shift per la $\mathcal{L}$-trasformata.

Risposta: v. libro di testo, §8.1-8.2.

C. (6 punti). Derivata di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Arrivare alla definizione di questo concetto in modo che nel caso particolare di distribuzioni indotte da funzioni $C^1(\mathbb{R})$ la derivata distribuzionale coincida con la derivata classica e dimostrare che la derivata di una distribuzione è effettivamente una distribuzione. Mostrare poi come dalla definizione segue la formula di calcolo per la derivata n-esima di una distribuzione. Infine, fare un esempio di funzione localmente integrabile la cui derivata distribuzionale non è una funzione, dimostrando l'affermazione fatta.

Risposta: v. libro di testo, §9.2.2.

D. (6 punti). Dare la definizione di limite di una successione di distribuzioni, somma di una serie di distribuzioni, e fare esempi di queste operazioni. **Dimostrare** il risultato sullo scambio di limite (o serie) di distribuzioni e derivazione. Infine, nel caso di una successione di distribuzioni temperate, enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo della trasformata di Fourier del limite della successione, o della somma della serie.

Risposta: v. libro di testo, §9.2.3, 9.5.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 3, C = 2, q_0 = 5$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = \chi_{(0,1)}(t)$.

$$3i(t) + \frac{1}{2}\left(5 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di $i(t), v(t)$ rispettivamente si ha:

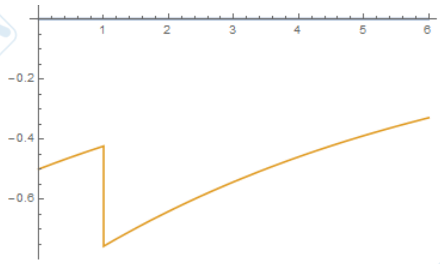
$$\begin{aligned}
3I(s) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{s} + \frac{I(s)}{s}\right) &= V(s) \\
I(s)\left(3 + \frac{1}{2s}\right) &= V(s) - \frac{5}{2s} \\
I(s) &= \frac{2s}{6s+1}V(s) - \frac{5}{6s+1} \\
&= \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{6s+1}\right\}V(s) - \frac{5}{6s+1} \\
&= \frac{1}{3}V(s) - \frac{1}{18\left(s+\frac{1}{6}\right)}V(s) - \frac{5}{6\left(s+\frac{1}{6}\right)} \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}v(t) - \frac{1}{18}e^{-\frac{t}{6}} * v(t) - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}}\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$i(t) = \frac{1}{3}v(t) - \frac{1}{18}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{6}} v(\tau)\, d\tau - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}}.$$

Per $v(t) = \chi_{(0,1)}(t)$ si ha

$$\begin{aligned}
i(t) &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{1}{3} - \frac{1}{18}e^{-\frac{t}{6}}\int_0^t e^{\frac{\tau}{6}} d\tau - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{18}e^{-\frac{t}{6}}\int_0^1 e^{\frac{\tau}{6}} d\tau - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}}\left(e^{\frac{t}{6}} - 1\right) - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}}\left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right) - \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{6}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{se } t < 1 & -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{6}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\left(\frac{1}{3}e^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{6}} \end{cases}
\end{aligned}$$



2. (5 punti).

a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'espressione il più possibile esplicita e semplificata della distribuzione:

$$T = \tau_{\frac{1}{3}} \left[\left(D_3 \left(x^2 \delta_3 \right) \right)' \right].$$

(Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $T = ...$ e NON $\langle T, \phi \rangle = ...$).

b. Calcolare la derivata distribuzionale $(T_f)'$ della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|} + \arctan \frac{1}{x+1},$$

giustificando il procedimento seguito.

a.

$$\begin{aligned} x^2 \delta_3 &= 9\delta_3 \\ D_3 \left(x^2 \delta_3 \right) &= D_3 \left(9\delta_3 \right) = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \delta_1 = 3\delta_1 \\ \left(D_3 \left(x^2 \delta_3 \right) \right)' &= (3\delta_1)' = 3\delta_1' \\ \tau_{\frac{1}{3}} \left[\left(D_3 \left(x^2 \delta_3 \right) \right)' \right] &= \tau_{\frac{1}{3}} \left[3\delta_1' \right] = 3\delta_{\frac{2}{3}}'. \end{aligned}$$

b. La funzione $\sqrt[3]{|x|}$ è continua con un punto di cuspide; la sua derivata classica,

$$\left(\sqrt[3]{|x|} \right)' = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{3x^{2/3}}$$

è L^1_{loc} perciò coincide con la derivata distribuzionale.

La funzione $\arctan \frac{1}{x+1}$ è regolare a eccezione di $x = -1$ dove ha una discontinuità a salto:

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \arctan \frac{1}{x+1} = \pm \frac{\pi}{2},$$

quindi il salto è pari a π. Di conseguenza la sua derivata distribuzionale è la somma della derivata classica fuori da -1 e di una $\pi\delta_{-1}$. Complessivamente:

$$\begin{aligned}(T_f)' &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{3x^{2/3}} + \pi\delta_{-1} + \frac{1}{1+\frac{1}{(x+1)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{3x^{2/3}} + \pi\delta_{-1} - \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{3x^{2/3}} + \pi\delta_{-1} - \frac{1}{x^2+2x+2}.\end{aligned}$$

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{2x^4 + 5ix^2 - 3}{x^2 + i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria.

$$\frac{2x^4 + 5ix^2 - 3}{x^2 + i} = 2x^2 + 3i$$
$$\mathcal{F}(T_f) = 2\mathcal{F}\left(x^2\right) + 3i\mathcal{F}(1).$$

Ora:

$$\mathcal{F}(1) = \delta$$
$$\mathcal{F}\left(x^2\right) = -\frac{\delta''}{4\pi^2}$$

e in definitiva:

$$\widehat{(T_f)} = -\frac{\delta''}{2\pi^2} + 3i\delta.$$