

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Primo appello. Luglio 2018

A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

B. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi, dopo aver enunciato con precisione le proprietà che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata (per funzioni di una variabile), utilizzarle per calcolare esplicitamente la trasformata di Fourier della gaussiana e^{-x^2} . Mostrare come da questo risultato si deduce la trasformata della gaussiana in n -variabili, $e^{-|x|^2}$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Infine, utilizzando le formule per la trasformata della dilatazione, dedurre la trasformata di $e^{-a|x|^2}$ per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata (compresa la definizione dell'opportuno spazio di funzioni test che si utilizza, e di convergenza in quello spazio di funzioni) e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k . (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

D. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema fondamentale dei filtri, dopo aver richiamato le definizioni dei concetti coinvolti.

Svolgere i seguenti esercizi**1. (5 punti).** Sia

$$f(x) = \frac{x}{(x+i)(x^2+1)}.$$

- a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?
- b. Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

2. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$u(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} (t-\tau) u(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita u , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile.**3. (5 Punti).** Sia

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}}.$$

Provare che T definisce una distribuzione temperata, e calcolarne la trasformata di Fourier.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Primo appello. Luglio 2018
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

Risposta: v. libro di testo, §2.5.

B. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi, dopo aver enunciato con precisione le proprietà che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata (per funzioni di una variabile), utilizzarle per calcolare esplicitamente la trasformata di Fourier della gaussiana e^{-x^2} . Mostrare come da questo risultato si deduce la trasformata della gaussiana in n -variabili, $e^{-|x|^2}$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Infine, utilizzando le formule per la trasformata della dilatazione, dedurre la trasformata di $e^{-a|x|^2}$ per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata (compresa la definizione dell'opportuno spazio di funzioni test che si utilizza, e di convergenza in quello spazio di funzioni) e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k . (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.

D. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema fondamentale dei filtri, dopo aver richiamato le definizioni dei concetti coinvolti.

Risposta: v. libro di testo, §10.1

Svolgere i seguenti esercizi**1. (5 punti).** Sia

$$f(x) = \frac{x}{(x+i)(x^2+1)}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

b. Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

a. f non è né reale né immaginaria pura, né pari né dispari, quindi per \hat{f} non possiamo aspettarci che sia né reale né immaginaria pura, né pari né dispari. $f \in L^1 \cap L^2$ quindi $\hat{f} \in C_*^0 \cap L^2$. $xf(x) \notin L^1$ quindi ci aspettiamo che sia $\hat{f} \notin C^1$. $f \in C^\infty$ quindi $\hat{f}(\xi) = o(1/|\xi|^k)$ per ogni k , per $\xi \rightarrow \pm\infty$.

b.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x+i)(x^2+1)} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

La funzione $f(z) = \frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}$ ha un polo del 1° ordine in $z = i$ e uno del 2° ordine in $z = -i$.

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{per } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, -i \right) \\ \text{per } \xi \leq 0 & 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, i \right) \end{cases}$$

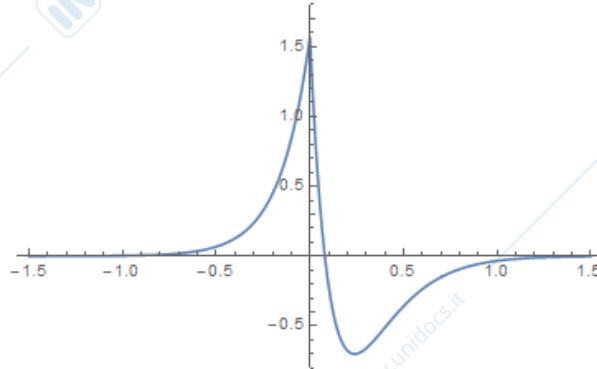
$$\operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, i \right) = \left(\frac{z}{(z+i)^2} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=i} = \frac{i}{-4} e^{2\pi \xi}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, -i \right) &= \left(\frac{z}{z-i} e^{-2\pi i \xi z} \right)'_{/z=-i} \\ &= \left[e^{-2\pi i \xi z} \left(-2\pi i \xi \frac{z}{z-i} + \frac{z-i-z}{(z-i)^2} \right) \right]_{/z=-i} = e^{-2\pi \xi} \left(-\pi i \xi + \frac{i}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \begin{cases} \text{per } \xi > 0 & -2\pi i \cdot e^{-2\pi \xi} \left(-\pi i \xi + \frac{i}{4} \right) \\ \text{per } \xi \leq 0 & 2\pi i \cdot \frac{i}{-4} e^{2\pi \xi} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{per } \xi > 0 & e^{-2\pi \xi} \left(-2\pi^2 \xi + \frac{\pi}{2} \right) \\ \text{per } \xi \leq 0 & \frac{\pi}{2} e^{2\pi \xi} \end{cases} = e^{-2\pi |\xi|} \left(-2\pi^2 \xi u(\xi) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

A posteriori, vediamo che \hat{f} è reale, né pari né dispari, continua ma non deriv-

abile.



2. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$u(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} (t-\tau) u(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita u , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile.

Indicando con U, F le trasformate di Laplace di u, f e ponendo $k(t) = te^{-t}$ si ha:

$$u - u * k = f$$

$$U(s) - U(s)(\mathcal{L}k)(s) = F(s).$$

Poiché

$$(\mathcal{L}k)(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

si ha

$$U(s) \left\{ 1 - \frac{1}{(s+1)^2} \right\} = F(s)$$

$$U(s) \left\{ \frac{s^2 + 2s}{(s+1)^2} \right\} = F(s)$$

$$U(s) = F(s) \left\{ \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s} \right\} = F(s) + F(s) \cdot \frac{1}{s(s+2)}.$$

Ora,

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \right)$$

$$U(s) = \mathcal{L} \left(f(t) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) * f(t) \right)$$

$$u(t) = f(t) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) * f(t) = f(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (1 - e^{-2(t-\tau)}) f(\tau) d\tau.$$

3. (5 Punti). Sia

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}}.$$

Provare che T definisce una distribuzione temperata, e calcolarne la trasformata di Fourier.

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}}, \phi \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \langle \delta_{\frac{k}{\pi}}, \phi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \phi \left(\frac{k}{\pi} \right). \\ |\langle T, \phi \rangle| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \phi \left(\frac{k}{\pi} \right) \right|. \end{aligned}$$

Poiché ϕ è a decrescenza rapida, ad esempio si ha

$$|\phi(x)| \leq \frac{c}{|x|^4},$$

dunque

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{c}{k^4/\pi^4} = c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Il funzionale T perciò è ben definito su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ed è evidentemente lineare. Se poi $\{\phi_n\}$ è una successione tendente a zero in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sarà

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{c_n}{|x|^4} \text{ con } c_n \rightarrow 0,$$

e il calcolo precedente mostra che

$$|\langle T, \phi_n \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{c_n}{k^4/\pi^4} = \frac{c_n}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Perciò $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Calcoliamo

$$\widehat{T} = \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathcal{F} \left(\delta_{\frac{k}{\pi}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-2\pi i \frac{k}{\pi} \xi} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-2ik\xi},$$

(che è una serie divergente come serie di funzioni, ma convergente come serie di distribuzioni temperate).

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero sulla prima prova in itinere. Luglio 2018
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a, b])$ è di Banach.

B. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (scrivendo, in particolare, gli assiomi del prodotto scalare) e la definizione di spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi, dopo aver enunciato con precisione le proprietà che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata (per funzioni di una variabile), utilizzarle per calcolare esplicitamente la trasformata di Fourier della gaussiana e^{-x^2} . Mostrare come da questo risultato si deduce la trasformata della gaussiana in n -variabili, $e^{-|x|^2}$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Infine, utilizzando le formule per la trasformata della dilatazione, dedurre la trasformata di $e^{-a|x|^2}$ per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta, in base ai risultati teorici studiati se la risposta è affermativa, portando opportuni controesempi se la risposta è negativa.

- Se $f(x) = x^5 e^{-x^2}$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = (1 - x^2) \chi_{(-2,2)}(x)$ e $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ e $g \in L^3(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^3(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = \frac{|x|}{x(1+x^2)}$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$.

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = x e^{-|x|}; g(x) = e^{-x} u(x).$$

a. Prima di eseguire calcoli, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, o a $L^2(\mathbb{R})$, se è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua (dimostrando l'affermazione fatta).

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ e semplificare l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x}{(x+i)(x^2+1)}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \widehat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

b. Calcolare \widehat{f} col metodo dei residui.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero sulla prima prova in itinere. Luglio 2018
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a, b])$ è di Banach.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1.

B. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

Risposta: v. libro di testo, §2.5.

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (scrivendo, in particolare, gli assiomi del prodotto scalare) e la definizione di spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

Risposta: v. libro di testo, §4.1-4.2.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi, dopo aver enunciato con precisione le proprietà che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata (per funzioni di una variabile), utilizzarle per calcolare esplicitamente la trasformata di Fourier della gaussiana e^{-x^2} . Mostrare come da questo risultato si deduce la trasformata della gaussiana in n -variabili, $e^{-|x|^2}$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Infine, utilizzando le formule per la trasformata della dilatazione, dedurre la trasformata di $e^{-a|x|^2}$ per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta, in base ai risultati teorici studiati se la risposta è affermativa, portando opportuni controesempi se la risposta è negativa.

- Se $f(x) = x^5 e^{-x^2}$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = (1-x^2)\chi_{(-2,2)}(x)$ e $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ e $g \in L^3(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^3(\mathbb{R})$
- Se $f(x) = \frac{|x|}{x(1+x^2)}$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$.

- Se $f(x) = x^5 e^{-x^2}$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

Falso. Se $g(x) = e^{x^2}$ allora g è localmente integrabile perché è continua, ma $(fg)(x) = x^5$ non è integrabile.

- Se $f(x) = (1-x^2)\chi_{(-2,2)}(x)$ e $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

Vero. f ha supporto $[-2, 2]$ ed è limitata; $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$, perciò $g \in L^1[-2, 2]$; dunque $fg \in L^1[-2, 2]$ (perché f è limitata) quindi $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$ (perché fg fuori da $[-2, 2]$ è nulla).

- Se $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^1(\mathbb{R})$

Vero. $f \in L^1(\mathbb{R})$ perciò $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R})$; inoltre $f \in C^2(\mathbb{R})$ con derivata seconda infinitesima all'infinito, quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^2)$; una funzione continua e $o(1/\xi^2)$ all'infinito è anche $L^1(\mathbb{R})$, perciò essendo $g \in L^1(\mathbb{R})$ è anche $\widehat{f} * g \in L^1(\mathbb{R})$.

- Se $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^3(\mathbb{R})$

Vero. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, perciò $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^3(\mathbb{R})$ dunque poiché $g \in L^1(\mathbb{R})$, per il Teorema di Young è anche $\widehat{f} * g \in L^3(\mathbb{R})$.

- Se $f(x) = \frac{|x|}{x(1+x^2)}$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$.

Falso. La funzione f è integrabile ma discontinua in 0, perciò certamente $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R})$ ma $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Scegliendo $g(x) = 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ si ha $\widehat{f} \cdot g = \widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = xe^{-|x|}; g(x) = e^{-x}u(x).$$

- Prima di eseguire calcoli, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, o a $L^2(\mathbb{R})$, se è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua (dimostrando l'affermazione fatta).

- Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ e semplificare l'espressione ottenuta.

a. $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ perciò $f * g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. f è dispari ma g non è simmetrica, $f * g$ non è simmetrica.

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} (x-y) e^{-|x-y|} e^{-y} dy.$$

La funzione

$$x \mapsto (x - y) e^{-|x-y|} e^{-y} \text{ è continua,}$$

per ogni $y \in (0, +\infty)$ fissato. Inoltre $te^{-|t|}$ è limitata, perciò

$$\left| (x - y) e^{-|x-y|} e^{-y} \right| \leq ce^{-y} \in L^1(0, +\infty),$$

perciò per il teorema di continuità sugli integrali dipendenti da un parametro, $f * g$ è continua.

b.

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \begin{cases} \text{se } x < 0 & \int_0^{+\infty} (x - y) e^{x-y} e^{-y} dy \\ \text{se } x \geq 0 & \int_0^x (x - y) e^{-x+y} e^{-y} dy + \int_x^{+\infty} (x - y) e^{x-y} e^{-y} dy \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } x < 0 & e^x \int_0^{+\infty} (x - y) e^{-2y} dy \\ \text{se } x \geq 0 & e^{-x} \int_0^x (x - y) dy + e^x \int_x^{+\infty} (x - y) e^{-2y} dy \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int (x - y) e^{-2y} dy = (x - y) \frac{e^{-2y}}{-2} - \int \frac{e^{-2y}}{2} dy = (y - x) \frac{e^{-2y}}{2} + \frac{e^{-2y}}{4} + c$$

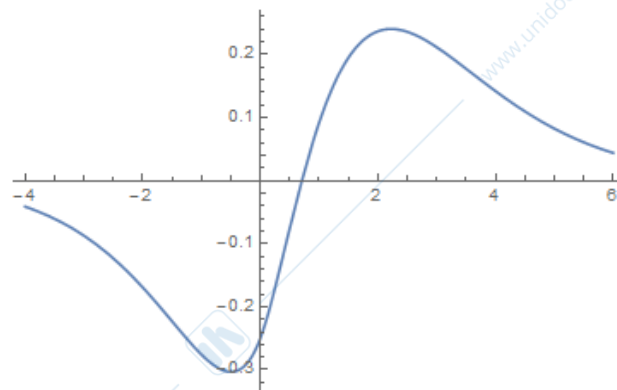
$$e^x \int_0^{+\infty} (x - y) e^{-2y} dy = e^x \left[(y - x) \frac{e^{-2y}}{2} + \frac{e^{-2y}}{4} \right]_0^{+\infty} = e^x \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$e^{-x} \int_0^x (x - y) dy = e^{-x} \int_0^x y dy = \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

$$e^x \int_x^{+\infty} (x - y) e^{-2y} dy = e^x \left[(y - x) \frac{e^{-2y}}{2} + \frac{e^{-2y}}{4} \right]_x^{+\infty} = -e^x \left(\frac{e^{-2x}}{4} \right) = -\frac{e^{-x}}{4}$$

perciò

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \text{se } x < 0 & e^x \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ \text{se } x \geq 0 & e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \end{cases}$$



3. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x}{(x+i)(x^2+1)}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \widehat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

b. Calcolare \widehat{f} col metodo dei residui.

a. f non è né reale né immaginaria pura, né pari né dispari, quindi per \widehat{f} non possiamo aspettarci che sia né reale né immaginaria pura, né pari né dispari. $f \in L^1 \cap L^2$ quindi $\widehat{f} \in C_*^0 \cap L^2$. $xf(x) \notin L^1$ quindi ci aspettiamo che sia $\widehat{f} \notin C^1$. $f \in C^\infty$ quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^k)$ per ogni k , per $\xi \rightarrow \pm\infty$.

b.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x+i)(x^2+1)} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

La funzione $f(z) = \frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}$ ha un polo del 1° ordine in $z = i$ e uno del 2° ordine in $z = -i$.

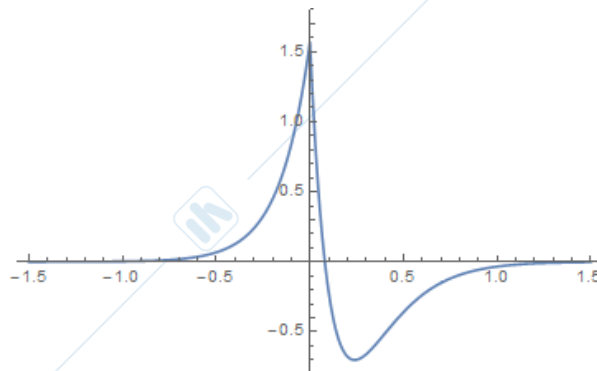
$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{per } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, -i \right) \\ \text{per } \xi \leq 0 & 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, i \right) \end{cases}$$

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, i \right) = \left(\frac{z}{(z+i)^2} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=i} = \frac{i}{-4} e^{2\pi \xi}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z+i)(z^2+1)} e^{-2\pi i \xi z}, -i \right) &= \left(\frac{z}{z-i} e^{-2\pi i \xi z} \right)'_{/z=-i} \\ &= \left[e^{-2\pi i \xi z} \left(-2\pi i \xi \frac{z}{z-i} + \frac{z-i-z}{(z-i)^2} \right) \right]_{/z=-i} = e^{-2\pi \xi} \left(-\pi i \xi + \frac{i}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \begin{cases} \text{per } \xi > 0 & -2\pi i \cdot e^{-2\pi \xi} \left(-\pi i \xi + \frac{i}{4} \right) \\ \text{per } \xi \leq 0 & 2\pi i \cdot \frac{i}{-4} e^{2\pi \xi} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{per } \xi > 0 & e^{-2\pi \xi} \left(-2\pi^2 \xi + \frac{\pi}{2} \right) \\ \text{per } \xi \leq 0 & \frac{\pi}{2} e^{2\pi \xi} \end{cases} = e^{-2\pi |\xi|} \left(-2\pi^2 \xi u(\xi) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

A posteriori, vediamo che \widehat{f} è reale, né pari né dispari, continua ma non derivabile.



Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero sulla seconda prova in itinere. Luglio 2018
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la \mathcal{L} -trasformata della convoluzione, la formula del t -shift e dell' s -shift per la \mathcal{L} -trasformata.

B. (6 punti). Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dopo aver ricordato le definizioni delle operazioni $\tau_a T$, $D_a T$, T^\vee , gT per g funzione opportuna, enunciare e **dimostrare** le formule di derivazione per la traslata, dilatata, riflessa di T e per il prodotto gT .

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata (compresa la definizione dell'opportuno spazio di funzioni test che si utilizza, e di convergenza in quello spazio di funzioni) e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k . (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

D. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema fondamentale dei filtri, dopo aver richiamato le definizioni dei concetti coinvolti.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$u(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} (t-\tau) u(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita u , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile.

2. (5 punti). Si consideri la distribuzione

$$T = x^2 \delta_2 + \chi_{[1,2]}(x).$$

a. Calcolare la derivata distribuzionale T' .

b. Calcolare $x D_3(T')$, semplificando l'espressione ottenuta. (Ossia: calcolare esplicitamente $\langle x D_3(T'), \phi \rangle$ e semplificare l'espressione ottenuta, fino a saperla riscrivere in modo da riconoscere l'espressione della distribuzione $x D_3(T')$).

3. (5 Punti). Sia

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}}.$$

Provare che T definisce una distribuzione temperata, e calcolarne la trasformata di Fourier.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero sulla seconda prova in itinere. Luglio 2018
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la \mathcal{L} -trasformata della convoluzione, la formula del t -shift e dell' s -shift per la \mathcal{L} -trasformata.

Risposta: v. libro di testo, §8.2

B. (6 punti). Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dopo aver ricordato le definizioni delle operazioni $\tau_a T$, $D_a T$, T^\vee , gT per g funzione opportuna, enunciare e **dimostrare** le formule di derivazione per la traslata, dilatata, riflessa di T e per il prodotto gT .

Risposta: v. libro di testo, §9.2.3

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata (compresa la definizione dell'opportuno spazio di funzioni test che si utilizza, e di convergenza in quello spazio di funzioni) e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k . (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.

D. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema fondamentale dei filtri, dopo aver richiamato le definizioni dei concetti coinvolti.

Risposta: v. libro di testo, §10.1

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$u(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} (t-\tau) u(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita u , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile.

Indicando con U, F le trasformate di Laplace di u, f e ponendo $k(t) = te^{-t}$ si ha:

$$u - u * k = f \\ U(s) - U(s) (\mathcal{L}k)(s) = F(s).$$

Poiché

$$(\mathcal{L}k)(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

si ha

$$U(s) \left\{ 1 - \frac{1}{(s+1)^2} \right\} = F(s)$$

$$U(s) \left\{ \frac{s^2 + 2s}{(s+1)^2} \right\} = F(s)$$

$$U(s) = F(s) \left\{ \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s} \right\} = F(s) + F(s) \cdot \frac{1}{s(s+2)}.$$

Ora,

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \right)$$

$$U(s) = \mathcal{L} \left(f(t) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) * f(t) \right)$$

$$u(t) = f(t) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) * f(t) = f(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (1 - e^{-2(t-\tau)}) f(\tau) d\tau.$$

2. (5 punti). Si consideri la distribuzione

$$T = x^2 \delta_2 + \chi_{[1,2]}(x).$$

a. Calcolare la derivata distribuzionale T' .

b. Calcolare $x D_3(T')$, semplificando l'espressione ottenuta. (Ossia: calcolare esplicitamente $\langle x D_3(T'), \phi \rangle$ e semplificare l'espressione ottenuta, fino a saperla riscrivere in modo da riconoscere l'espressione della distribuzione $x D_3(T')$).

a.

$$T = x^2 \delta_2 + \chi_{[1,2]}(x) = 4\delta_2 + \chi_{[1,2]}(x)$$

$$T' = 4\delta_2' + \delta_1 - \delta_2.$$

b.

$$\begin{aligned} \langle xD_3(T'), \phi \rangle &= \langle D_3(T'), x\phi(x) \rangle = \frac{1}{3} \langle T', D_{1/3}(x\phi(x)) \rangle \\ &= \frac{1}{3} \left\langle 4\delta_2' + \delta_1 - \delta_2, \frac{x}{3} \phi\left(\frac{x}{3}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left\langle 4\delta_2', \frac{x}{3} \phi\left(\frac{x}{3}\right) \right\rangle + \left\langle \delta_1, \frac{x}{3} \phi\left(\frac{x}{3}\right) \right\rangle - \left\langle \delta_2, \frac{x}{3} \phi\left(\frac{x}{3}\right) \right\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ -4 \left(\frac{x}{3} \phi\left(\frac{x}{3}\right) \right)' \Big|_{x=2} + \frac{1}{3} \phi\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} \phi\left(\frac{2}{3}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3} \phi\left(\frac{x}{3}\right) \right)' \Big|_{x=2} &= \left(\frac{1}{3} \phi\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{9} \phi'\left(\frac{x}{3}\right) \right)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{3} \phi'\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{9} \phi''\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} \langle xD_3(T'), \phi \rangle &= \frac{1}{3} \left\{ -\frac{4}{3} \phi\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{8}{9} \phi'\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \phi\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} \phi\left(\frac{2}{3}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ -2\phi\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{8}{9} \phi'\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \phi\left(\frac{1}{3}\right) \right\} \\ &= \left\langle -\frac{2}{3} \delta_{2/3} + \frac{8}{27} \delta_{2/3}' + \frac{1}{3} \delta_{1/3}, \phi \right\rangle \end{aligned}$$

perciò

$$xD_3(T') = \frac{1}{3} \delta_{1/3} - \frac{2}{3} \delta_{2/3} + \frac{8}{27} \delta_{2/3}'$$

3. (5 Punti). Sia

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}}.$$

Provare che T definisce una distribuzione temperata, e calcolarne la trasformata di Fourier.

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}}, \phi \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \langle \delta_{\frac{k}{\pi}}, \phi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \phi\left(\frac{k}{\pi}\right). \\ |\langle T, \phi \rangle| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left| \phi\left(\frac{k}{\pi}\right) \right|. \end{aligned}$$

Poiché ϕ è a decrescenza rapida, ad esempio si ha

$$|\phi(x)| \leq \frac{c}{|x|^4},$$

dunque

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{c}{k^4/\pi^4} = c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Il funzionale T perciò è ben definito su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ed è evidentemente lineare. Se poi $\{\phi_n\}$ è una successione tendente a zero in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sarà

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{c_n}{|x|^4} \text{ con } c_n \rightarrow 0,$$

e il calcolo precedente mostra che

$$|\langle T, \phi_n \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{c_n}{k^4/\pi^4} = \frac{c_n}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Perciò $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Calcoliamo

$$\hat{T} = \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta_{\frac{k}{\pi}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathcal{F} \left(\delta_{\frac{k}{\pi}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-2\pi i \frac{k}{\pi} \xi} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-2ik\xi},$$

(che è una serie divergente come serie di funzioni, ma convergente come serie di distribuzioni temperate).