Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Seconda prova in itinere. Giugno 2018

A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione le proprietà della trasformata di Laplace di una funzione (comportamento all'infinito, derivabilità della trasformata di Laplace, formula delle derivate della trasformata), e **dimostrarle** (per le derivate, dimostrare solo la formula per la derivata prima).

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ricavare (con i calcoli dettagliati) la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspide, oppure di discontinuità a salto.

C. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Fare esempi di classi di distribuzioni temperate e enunciare il risultato sulla chiusura dello spazio delle distribuzioni temperate rispetto a varie operazioni. Infine, dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata.

D. (6 punti). Dare la definizione di limite di una successione di distribuzioni, somma di una serie di distribuzioni, e fare esempi di queste operazioni. **Dimostrare** il risultato sullo scambio di limite (o serie) di distribuzioni e derivazione. Infine, dare la definizione di limite di una successione di distribuzioni temperate e **dimostrare** come da questa si dimostra lo scambio di limite (o serie) di distribuzioni temperate con l'operatore trasformata di Fourier (ossia: dimostrare la continuità dell'operatore trasformata di Fourier sullo spazio delle distribuzioni temperate).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LC in serie:

$$Li'(t)+\frac{1}{C}\left(q_0+\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right)=v(t)$$

con $L=2, C=\frac{1}{4}, q_0=1, i(0)=1$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

2. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x)=e^{-|x-1|}+\left(1+\sqrt[3]{x}\right)u(x).$$

a. Si calcoli la derivata distribuzionale $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito;

b. Si calcoli $x\cdot(T_f)'$, semplificando l'espressione ottenuta;

c. Si calcoli infine la derivata distribuzionale $(xT_f)'$, giustificando il procedimento seguito e semplificando l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{x^2}{2x+i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria. Infine, scrivere esplicitamente il valore di $\left\langle \widehat{T_f},\phi\right\rangle$ per $\phi\in S(R)$ ("esplicitamente" significa: mediante un'espressione che coinvolge i valori di ϕ ed eventulmente delle sue derivate, ma non di $\widehat{\phi}$).

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Prima prova in itinere. Giugno 2018
A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata e derivata n-esima di una funzione.

B. (6 punti). Le operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, moltiplicazione per una funzione, di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: mostrare come si arriva alle definizioni di queste operazioni in modo che siano un'estensione degli analoghi concetti per le funzioni. Esemplificare poi queste operazioni nel caso della distribuzione $T = \delta_{x_0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

C. (6 punti). Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di distribuzione a supporto compatto e di convoluzione di distribuzioni, sotto opportune ipotesi. Fare esempi di classi di distribuzioni a supporto compatto. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile). Infine, illustrare l'utilizzo dei risultati precedenti in relazione al concetto di *soluzione fondamentale* dell'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^3$.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, enunciare il teorema sulle proprietà della trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: trasformata della traslata, dilatata, del prodotto per un esponenziale complesso, della derivata; derivata della trasformata; trasformata di una (opportuna) convoluzione. In particolare, **dimostrare** le due relazioni che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LC in serie:

$$Li'(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 2, C = \frac{1}{4}, q_0 = 1, i(0) = 1$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

2. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{-|x-1|} + \left(1 + \sqrt[3]{x}\right) u(x).$$

a. Si calcoli la derivata distribuzionale $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito;

b. Si calcoli $x \cdot (T_f)'$, semplificando l'espressione ottenuta;

c. Si calcoli infine la derivata distribuzionale $(xT_f)'$, giustificando il procedimento seguito e semplificando l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x + i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria. Infine, scrivere esplicitamente il valore di $\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle$ per $\phi \in S(R)$ ("esplicitamente" significa: mediante un'espressione che coinvolge i valori di ϕ ed eventulmente delle sue derivate, ma non di $\widehat{\phi}$).

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Prima prova in itinere. Giugno 2018
A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione le proprietà della trasformata di Laplace di una funzione (comportamento all'infinito, derivabilità della trasformata di Laplace, formula delle derivate della trasformata), e **dimostrarle** (per le derivate, dimostrare solo la formula per la derivata prima).

Risposta: v. libro di testo, §8.1

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ricavare (con i calcoli dettagliati) la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspide, oppure di discontinuità a salto.

Risposta: v. libro di testo, §9.2.2

C. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Fare esempi di classi di distribuzioni temperate e enunciare il risultato sulla chiusura dello spazio delle distribuzioni temperate rispetto a varie operazioni. Infine, dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata.

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1

D. (6 punti). Dare la definizione di limite di una successione di distribuzioni, somma di una serie di distribuzioni, e fare esempi di queste operazioni. **Dimostrare** il risultato sullo scambio di limite (o serie) di distribuzioni e derivazione. Infine, dare la definizione di limite di una successione di distribuzioni temperate e **dimostrare** come da questa si dimostra lo scambio di limite (o serie) di distribuzioni temperate con l'operatore trasformata di Fourier (ossia: dimostrare la continuità dell'operatore trasformata di Fourier sullo spazio delle distribuzioni temperate).

Risposta: v. libro di testo, §9.2.3, 9.5.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LC in serie:

$$Li'(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 2, C = \frac{1}{4}, q_0 = 1, i(0) = 1$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri e ponendo $I(s) = \mathcal{L}(i)(s), V(s) = \mathcal{L}(v)(s)$ si ha:

$$\begin{aligned} L(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{Cs}(q_0 + I(s)) &= V(s) \\ \left(Ls + \frac{1}{Cs}\right) I(s) &= V(s) + Li(0) - \frac{1}{Cs}q_0 \\ I(s) &= \frac{V(s)}{Ls + \frac{1}{Cs}} + \frac{Li(0) - \frac{1}{Cs}q_0}{Ls + \frac{1}{Cs}} \end{aligned}$$

e per $L = 2, C = \frac{1}{4}, q_0 = 1, i(0) = 1$ si ha

$$\begin{aligned} I(s) &= V(s)\frac{s}{2(s^2+2)} + \frac{s-2}{s^2+2} \\ &\equiv V(s)H(s) + G(s) \end{aligned}$$

con

$$H(s) = \frac{s}{2(s^2+2)}; G(s) = \frac{s-2}{s^2+2},$$

funzioni che dobbiamo ora antitrasformare.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right) \\ G(s) &= \frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{s^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \mathcal{L}\left(\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) \end{aligned}$$

perciò la soluzione è:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) * v(t) + \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\sqrt{2}(t-\tau)\,v(\tau)\,d\tau + \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right). \end{aligned}$$

2. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{-|x-1|} + \left(1 + \sqrt[3]{x}\right) u(x).$$

a. Si calcoli la derivata distribuzionale $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito;

b. Si calcoli $x \cdot (T_f)'$, semplificando l'espressione ottenuta;

c. Si calcoli infine la derivata distribuzionale $\left(x\,(T_f)'\right)'$, giustificando il procedimento seguito e semplificando l'espressione ottenuta.

a. La funzione f ha un punto angoloso in $x = 1$, un punto di discontinuità a salto in $x = 0$, con salto 1, e per $x \to 0^+$ ha tangente verticale, con derivata prima, da destra, localmente integrabile $\left((1 + \sqrt[3]{x})' = \frac{1}{2x^{2/3}} \in L^1_{loc}\right)$. Perciò:

$$(T_f)' = -e^{-|x-1|}\,\mathrm{sgn}\,(x-1) + \frac{1}{3x^{2/3}} u(x) + \delta.$$

b.

$$\begin{aligned} x \cdot (T_f)' &= -xe^{-|x-1|}\,\mathrm{sgn}\,(x-1) + \frac{x}{3x^{2/3}} u(x) + x\delta \\ &= -xe^{-|x-1|}\,\mathrm{sgn}\,(x-1) + \frac{x^{1/3}}{3} u(x) \equiv g(x), \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $x \cdot \delta = 0$.

c. La funzione g ha un punto di discontinuità a salto in $x = 1$, con $g(1^+) - g(1^-) = -2$, un punto di non derivabilità in $x = 0$, con derivata prima localmente integrabile. Perciò:

$$\left(x\,(T_f)'\right)' = (T_g)' = -e^{-|x-1|}\left(\mathrm{sgn}\,(x-1) - x\right) - 2\delta_1 + \frac{1}{9x^{2/3}} u(x)$$

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria. Infine, scrivere esplicitamente il valore di $\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle$ per $\phi \in S(R)$ ("esplicitamente" significa: mediante un'espressione che coinvolge i valori di ϕ ed eventulmente delle sue derivate, ma non di $\widehat{\phi}$).

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+i} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}\frac{x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{x+\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{i}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right)$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{i}{4} - \frac{1}{8}\frac{1}{x+\frac{i}{2}}$$
$$\widehat{T_f} = \frac{1}{2}\mathcal{F}(x) - \frac{i}{4}\mathcal{F}(1) - \frac{1}{8}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\delta'}{(-2\pi i)} - \frac{i}{4}\delta - \frac{1}{8}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right)(\xi) = \int_R \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{x+i/2}dx$$

$g(z) = \frac{1}{z+i/2}$ ha un polo del 1° ordine in $z = -i/2$, perciò

$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 0 \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z+i/2}, -i/2\right) \end{cases}$$
$$= -2\pi i e^{-\pi\xi}u(\xi)$$
$$\widehat{T_f} = \frac{1}{2}\frac{\delta'}{(-2\pi i)} - \frac{i}{4}\delta - \frac{1}{8}\left(-2\pi i e^{-\pi\xi}u(\xi)\right)$$
$$= i\left(\frac{1}{4\pi}\delta' - \frac{1}{4}\delta + \frac{\pi}{4}e^{-\pi\xi}u(\xi)\right).$$

$$\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle = i\left\{\frac{1}{4\pi}\langle\delta', \phi\rangle - \frac{1}{4}\langle\delta, \phi\rangle + \frac{\pi}{4}\left\langle e^{-\pi\xi}u(\xi), \phi\right\rangle\right\}$$
$$= i\left\{-\frac{1}{4\pi}\phi'(0) - \frac{1}{4}\phi(0) + \frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} e^{-\pi\xi}\phi(\xi)\,d\xi\right\}.$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Prima prova in itinere. Giugno 2018
A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata e derivata n-esima di una funzione.

Risposta: v. libro di testo, §8.2

B. (6 punti). Le operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, moltiplicazione per una funzione, di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: mostrare come si arriva alle definizioni di queste operazioni in modo che siano un'estensione degli analoghi concetti per le funzioni. Esemplificare poi queste operazioni nel caso della distribuzione $T = \delta_{x_0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Risposta: v. libro di testo, §9.2.3

C. (6 punti). Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di distribuzione a supporto compatto e di convoluzione di distribuzioni, sotto opportune ipotesi. Fare esempi di classi di distribuzioni a supporto compatto. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile). Infine, illustrare l'utilizzo dei risultati precedenti in relazione al concetto di *soluzione fondamentale* dell'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^3$.

Risposta: v. libro di testo, §9.3

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, enunciare il teorema sulle proprietà della trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: trasformata della traslata, dilatata, del prodotto per un esponenziale complesso, della derivata; derivata della trasformata; trasformata di una (opportuna) convoluzione. In particolare, **dimostrare** le due relazioni che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LC in serie:

$$Li'(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 2, C = \frac{1}{4}, q_0 = 1, i(0) = 1$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri e ponendo $I(s) = \mathcal{L}(i)(s), V(s) = \mathcal{L}(v)(s)$ si ha:

$$\begin{aligned} L(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{Cs}(q_0 + I(s)) &= V(s) \\ \left(Ls + \frac{1}{Cs}\right) I(s) &= V(s) + Li(0) - \frac{1}{Cs} q_0 \\ I(s) &= \frac{V(s)}{Ls + \frac{1}{Cs}} + \frac{Li(0) - \frac{1}{Cs} q_0}{Ls + \frac{1}{Cs}} \end{aligned}$$

e per $L = 2, C = \frac{1}{4}, q_0 = 1, i(0) = 1$ si ha

$$\begin{aligned} I(s) &= V(s) \frac{s}{2(s^2+2)} + \frac{s-2}{s^2+2} \\ &\equiv V(s) H(s) + G(s) \end{aligned}$$

con

$$H(s) = \frac{s}{2(s^2+2)}; G(s) = \frac{s-2}{s^2+2},$$

funzioni che dobbiamo ora antitrasformare.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right) \\ G(s) &= \frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{s^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \mathcal{L}\left(\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) \end{aligned}$$

perciò la soluzione è:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) * v(t) + \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\sqrt{2}(t-\tau)\, v(\tau)\, d\tau + \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right). \end{aligned}$$

2. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{-|x-1|} + \left(1 + \sqrt[3]{x}\right) u(x).$$

a. Si calcoli la derivata distribuzionale $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito;

b. Si calcoli $x \cdot (T_f)'$, semplificando l'espressione ottenuta;

c. Si calcoli infine la derivata distribuzionale $\left(x (T_f)'\right)'$, giustificando il procedimento seguito e semplificando l'espressione ottenuta.

a. La funzione f ha un punto angoloso in $x = 1$, un punto di discontinuità a salto in $x = 0$, con salto 1, e per $x \to 0^+$ ha tangente verticale, con derivata prima, da destra, localmente integrabile $\left((1 + \sqrt[3]{x})' = \frac{1}{2x^{2/3}} \in L^1_{loc}\right)$. Perciò:

$$(T_f)' = -e^{-|x-1|} \operatorname{sgn}(x-1) + \frac{1}{3x^{2/3}} u(x) + \delta.$$

b.

$$\begin{aligned} x \cdot (T_f)' &= -xe^{-|x-1|} \operatorname{sgn}(x-1) + \frac{x}{3x^{2/3}} u(x) + x\delta \\ &= -xe^{-|x-1|} \operatorname{sgn}(x-1) + \frac{x^{1/3}}{3} u(x) \equiv g(x), \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $x \cdot \delta = 0$.

c. La funzione g ha un punto di discontinuità a salto in $x = 1$, con $g(1^+) - g(1^-) = -2$, un punto di non derivabilità in $x = 0$, con derivata prima localmente integrabile. Perciò:

$$\left(x (T_f)'\right)' = (T_g)' = -e^{-|x-1|} (\operatorname{sgn}(x-1) - x) - 2\delta_1 + \frac{1}{9x^{2/3}} u(x)$$

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+i}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria. Infine, scrivere esplicitamente il valore di $\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle$ per $\phi \in S(R)$ ("esplicitamente" significa: mediante un'espressione che coinvolge i valori di ϕ ed eventulmente delle sue derivate, ma non di $\widehat{\phi}$).

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{2x+i} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}\frac{x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{x+\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{i}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{i}{4} - \frac{1}{8}\frac{1}{x+\frac{i}{2}} \\
\widehat{T_f} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(x) - \frac{i}{4}\mathcal{F}(1) - \frac{1}{8}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\delta'}{(-2\pi i)} - \frac{i}{4}\delta - \frac{1}{8}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+\frac{i}{2}}\right)(\xi) = \int_R \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{x+i/2}dx$$

$g(z) = \frac{1}{z+i/2}$ ha un polo del 1° ordine in $z = -i/2$, perciò

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 0 \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z+i/2}, -i/2\right) \end{cases} \\
&= -2\pi i e^{-\pi\xi}u(\xi) \\
\widehat{T_f} &= \frac{1}{2}\frac{\delta'}{(-2\pi i)} - \frac{i}{4}\delta - \frac{1}{8}\left(-2\pi i e^{-\pi\xi}u(\xi)\right) \\
&= i\left(\frac{1}{4\pi}\delta' - \frac{1}{4}\delta + \frac{\pi}{4}e^{-\pi\xi}u(\xi)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle &= i\left\{\frac{1}{4\pi}\langle\delta', \phi\rangle - \frac{1}{4}\langle\delta, \phi\rangle + \frac{\pi}{4}\left\langle e^{-\pi\xi}u(\xi), \phi\right\rangle\right\} \\
&= i\left\{-\frac{1}{4\pi}\phi'(0) - \frac{1}{4}\phi(0) + \frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} e^{-\pi\xi}\phi(\xi)\,d\xi\right\}.
\end{aligned}$$