Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Quinto appello. Febbraio 2021

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

B. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale, dare la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare con precisione e dimostrare il teorema che riguarda la trasformata di Fourier come isometria lineare tra spazi di Hilbert e la convergenza delle serie di Fourier in spazi di Hilbert.

C. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione; trasformata e dilatazioni. Dimostrare quindi le due formule delle derivate (è richiesto solo il caso di derivata prima e funzioni di una variabile).

D. Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di *distribuzione a supporto compatto* e di *convoluzione di distribuzioni*, sotto opportune ipotesi. Fare esempi di classi di distribuzioni a supporto compatto. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+4)(x+3i)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui, semplificando l'espressione ottenuta (in particolare, separare parte reale e immaginaria).

2. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 4, C = \frac{1}{2}, q_0 = 3$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$, dopo aver previsto a priori la regolarità della soluzione $i(t)$ in questo caso. Semplificare l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\left\{\sin(\pi x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\chi_{[k,k+1)}(x)\right\}.$$

a. Si dimostri che T_f definisce una distribuzione temperata

b. Si calcoli $\widehat{(T_f)}$.

c. Si calcoli $(T_f)'$.

(Nei punti *b* e *c* si chiede di scrivere l'espressione richiesta nella forma più semplice possibile).

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Quinto appello. Febbraio 2021
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

Risposta: v. libro di testo, §2.5.

B. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale, dare la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare con precisione e dimostrare il teorema che riguarda la trasformata di Fourier come isometria lineare tra spazi di Hilbert e la convergenza delle serie di Fourier in spazi di Hilbert.

Risposta: v. libro di testo, §4.3.

C. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione; trasformata e dilatazioni. Dimostrare quindi le due formule delle derivate (è richiesto solo il caso di derivata prima e funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.

D. Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di *distribuzione a supporto compatto* e di *convoluzione di distribuzioni*, sotto opportune ipotesi. Fare esempi di classi di distribuzioni a supporto compatto. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.3.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+4)(x+3i)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui, semplificando l'espressione ottenuta (in particolare, separare parte reale e immaginaria).

a. f non è né pari né dispari, è C^∞, L^1, $x^2 f \in L^1, x^3 f \notin L^1$, quindi: $\widehat{f}$ tende a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza $1/x^n$, sarà $C_*^0 \cap C^2$ ma ci aspettiamo non C^3; non ha particolari simmetrie.

b. Calcoliamo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+4)(x+3i)^2} e^{-2\pi i\xi x} dx.$$

$(z^2+4)(z+3i)^2 = 0$ per $z = -3i$ polo del 2° ordine, $z = \pm 2i$ poli del prim'ordine.

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, 2i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{2z(z+3i)^2}\right)_{/z=2i} = -\frac{e^{4\pi\xi}}{100i}$$

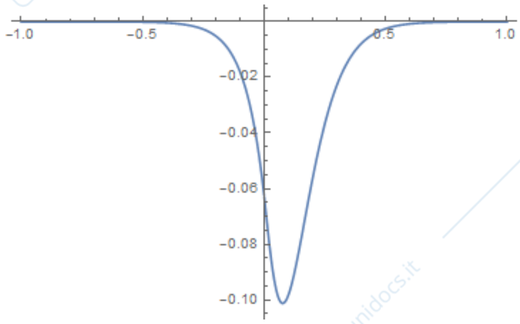
$$\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -2i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{2z(z+3i)^2}\right)_{/z=-2i} = \frac{e^{-4\pi\xi}}{4i}$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -3i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)}\right)'_{/z=-3i} = \left(e^{-2\pi i\xi z}\frac{-2\pi i\xi(z^2+4)-2z}{(z^2+4)^2}\right)_{/z=-3i}$$
$$= e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi i\xi+6i}{25}\right)$$

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -2\pi i\left\{\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -2i\right) + \text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -3i\right)\right\} \\ \text{se } \xi < 0 & 2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, 2i\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -2\pi i\left\{\frac{e^{-4\pi\xi}}{4i} + e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi i\xi+6i}{25}\right)\right\} = 2\pi\left\{-\frac{e^{-4\pi\xi}}{4} + e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi\xi+6}{25}\right)\right\} \\ \text{se } \xi < 0 & 2\pi i\left(-\frac{e^{4\pi\xi}}{100i}\right) = -\pi\frac{e^{4\pi\xi}}{50} \end{cases}$$

A posteriori si osserva che $\widehat{f}(\xi)$ è reale. Grafico di $\widehat{f}$:



2. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 4, C = \frac{1}{2}, q_0 = 3$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$, dopo aver previsto a priori la regolarità della soluzione $i(t)$ in questo caso. Semplificare l'espressione ottenuta.

$$4i(t) + 2\left(3 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di $i(t), v(t)$ rispettivamente si ha:

$$\begin{aligned}
4I(s) + 2\left(\frac{3}{s} + \frac{I(s)}{s}\right) &= V(s) \\
I(s)\left(4 + \frac{2}{s}\right) &= V(s) - \frac{6}{s} \\
I(s) &= \frac{s}{4s+2}V(s) - \frac{6}{4s+2} \\
&= \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{8s+4}\right\}V(s) - \frac{3}{2s+1} \\
&= \frac{1}{4}V(s) - \frac{1}{8\left(s+\frac{1}{2}\right)}V(s) - \frac{3}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{4}v(t) - \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{2}} * v(t) - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$i(t) = \frac{1}{4}v(t) - \frac{1}{8}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}v(\tau)\, d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}.$$

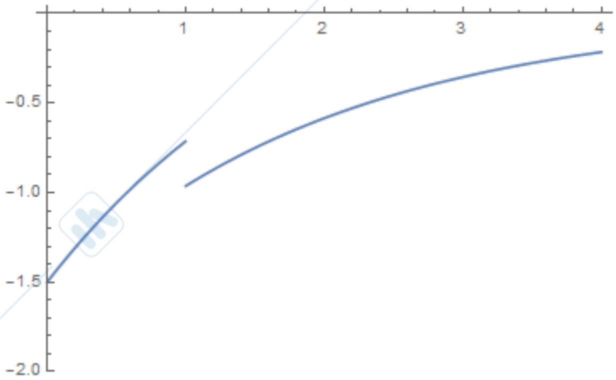
Per $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$, discontinua, la soluzione sarà discontinua per $t = 1$. Si ha

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{8}\int_0^1 e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$$

$$\int e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau = (\text{per parti})\ 2e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}(\tau - 2)$$

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{t}{4} - \frac{1}{4}\left[(t-2) + 2e^{-\frac{t}{2}}\right] - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{4}\left[-e^{-\frac{(t-1)}{2}} + 2e^{-\frac{t}{2}}\right] - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{1}{2} - 2e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{e^{1/2}}{4} - 2\right) \end{cases}$$



3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\left\{\sin(\pi x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\chi_{[k,k+1)}(x)\right\}.$$

a. Si dimostri che T_f definisce una distribuzione temperata
b. Si calcoli $\widehat{(T_f)}$.
c. Si calcoli $(T_f)'$.
(Nei punti *b* e *c* si chiede di scrivere l'espressione richiesta nella forma più semplice possibile).

a. Si ha:

$$|f(x)| \leq |x| + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |xk|\,\chi_{[k,k+1)}(x) \leq |x| + |x|(|x|+1).$$

Quindi f è una funzione lentamente crescente, perciò T_f definisce una distribuzione temperata.

b. Si ha, per le proprietà delle serie di distribuzioni temperate:

$$\widehat{T_f} = \mathcal{F}(x\sin(\pi x)) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\mathcal{F}\left(x\chi_{[k,k+1)}(x)\right).$$

Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sin(\pi x))(\xi) &= \frac{1}{2i}\left(\delta_{\frac{1}{2}} - \delta_{-\frac{1}{2}}\right)\\ \mathcal{F}(x\sin(\pi x)) &= -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\left(\mathcal{F}(\sin(\pi x))(\xi)\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\delta'_{\frac{1}{2}} - \delta'_{-\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x\chi_{[k,k+1)}(x)\right)(\xi) &= \int_k^{k+1} xe^{-2\pi i x\xi}dx = \left[x\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}dx\\ &= \frac{1}{2\pi i\xi}\left(ke^{-2\pi i k\xi} - (k+1)e^{-2\pi i(k+1)\xi}\right) - \frac{1}{(2\pi i\xi)^2}\left[e^{-2\pi i x\xi}\right]_k^{k+1}\\ &= \frac{1}{2\pi i\xi}\left(ke^{-2\pi i k\xi} - (k+1)e^{-2\pi i(k+1)\xi}\right) + \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\left(e^{-2\pi i(k+1)\xi} - e^{-2\pi i k\xi}\right).\end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}\widehat{T_f} = \frac{1}{4\pi}\left(\delta'_{\frac{1}{2}} - \delta'_{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2\pi i\xi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\left(ke^{-2\pi i k\xi} - (k+1)e^{-2\pi i(k+1)\xi}\right)\\ + \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\left(e^{-2\pi i(k+1)\xi} - e^{-2\pi i k\xi}\right).\end{aligned}$$

c. Si ha, per le proprietà delle serie di distribuzioni:

$$f(x) = (x\sin(\pi x)) + \left(x\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\chi_{[k,k+1)}(x)\right) = g(x) + h(x)$$

dove $g \in C^1(\mathbb{R})$ perciò

$$(T_g)' = g'(x) = \sin(\pi x) + x\pi\cos(\pi x)$$

mentre h è regolare a tratti, con discontinuità a salto nei punti $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, e

$$\begin{aligned}h\left(k^+\right) &= k^2\\ h\left(k^-\right) &= k(k-1)\\ h\left(k^+\right) - h\left(k^-\right) &= k\end{aligned}$$

perciò

$$(T_h)' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\chi_{[k,k+1)}(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\delta_k.$$

In definitiva,

$$(T_f)' = \sin(\pi x) + x\pi\cos(\pi x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\chi_{[k,k+1)}(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\delta_k.$$