SCHEMI ANALISI FUNZ.

- **Teo. della conv. dominata:** Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di mis. (μ completa)

Sia $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) un succ. di funz. misurabili e supponiamo che $\exists\, f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c.:

- $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to +\infty$ per q.o. $x \in \Omega$ (conv. punt.)
- $|f_n(x)| \le g(x)$ $\forall n = 1, 2, 3 \dots$ per q.o. $x \in \Omega$ e $g \in L^1(\Omega)$

$g(x)$ = MAGGIORANTE

$$\Longrightarrow \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

In particolare: $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu(x)$ ← il limite si scambia con l'integrale

- **Teo. continuità di un integrale dip. da un parametro:**

Sia $k : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $\Omega \to \mathbb{R}^n$ mis. t.c.:

1. per ogni $x \in I$ la funz. $y \to k(x,y)$ è integr. in Ω → $k(x,\cdot) \in L^1(\Omega)$ $\forall x \in I$
2. per q.o. $y \in \Omega$ la funz. $x \to k(x,y)$ è continua in $x_0 \in I$ → $k(\cdot, y)$ cont. in $x_0 \in I$ per q.o. $y \in \Omega$
3. $\exists\, g \in L^1(\Omega)$ e $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ per q.o. $y \in \Omega$ sia $|k(x,y)| \le g(y)$

$$\Longrightarrow u(x) := \int_\Omega k(x,y)\, d\mu(y) \quad \text{è continua in } x_0$$

- **Teo. derivabilità di un integrale dip. da un parametro.**

Sia $k : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $\Omega \to \mathbb{R}^n$ mis. t.c.:

1. $k(x,\cdot) \in L^1(\Omega)$ $\forall x \in I$
2. per q.o. $y \in \Omega$ $\exists\, \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)$ $\forall x \in I$
3. $\exists\, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ e $\exists\, g \in L^1(\Omega)$ t.c. $\left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,y)\right| \le g(y)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ per q.o. $y \in \Omega$

$$\Longrightarrow \exists\, \frac{du(x_0)}{dx} = \int_\Omega \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y)\, d\mu(y)$$

- **Spazi L^p:** Per $p \in [1, +\infty)$ $L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabile} : \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \}$

- **Proprietà funz. in base a p:**
  - $p \in (0,1)$ $\xrightarrow{\forall a,b \ge 0}$ $(a+b)^p \le a^p + b^p$
  - $p \in (1, +\infty)$ $\xrightarrow{\forall a,b \ge 0}$ $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$

- **Teo. Disuguaglianza di Minkowski:** $\forall p \geq 1$ $\quad \|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$ → vale la disug. triang. $\forall p \geq 1$

(mentre per $p \in (0,1)$ la disug. triangolare non è vera.)

↳ $L^p(\Omega)$ spazio NORMATO per tutti i $p \in [1,+\infty)$ (considerando come per L^1 lo spaz. quoziente $\mathcal{L}^p$ delle classi di eq. di f)

- **L^p in base a p:** $L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile : $\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \}$
  - SPAZI VETT. $\forall p \in (0,+\infty)$ → per $p \in (0,1)$ è VETT., METRICO, ma NON NON NORMATO $\quad d(f,g) = \int_\Omega |f(x) - g(x)|^p d\mu(x)$
  - SPAZI VETT. NORMATI $\forall p \in [1,+\infty)$ con $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$

    COMPLETI (BANACH)

- **$L^\infty(\Omega)$:** $L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}$ mis. : $\exists K > 0$ t.c. $|f(x)| \leq K$ per q.o. $x \in \Omega \}$ → f ESSENZIALMENTE LIMITATA

  ↳ SP. DI BANACH per $\forall p \geq 1$ con norma $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ K > 0 : |f(x)| \leq K$ per q.o. $x \in \Omega \}$

- **Teo. Disuguaglianza di Hölder:** Siano $p, q \in (1,+\infty)$ t.c. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (→ p, q = esponenti coniugati)

  Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ $\Longrightarrow$ $fg \in L^1(\Omega)$ e vale: $\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$

- **Teo. Inclusione tra spazi $L^p(\Omega)$ quando $\mu(\Omega) < +\infty$:** Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di mis. con $\mu(\Omega) < +\infty$. Sia $1 \leq p < r \leq \infty$. Allora: $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \qquad \forall f \in L^r(\Omega)$$

- **$L^p_{loc}(\mathbb{R})$:** $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ (f localmente integr.) se: $\forall (a,b)$ è $f \in L^p(a,b)$

  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \forall K$ chiuso e limit. $\subseteq \mathbb{R}^n$ si ha $f \in L^p(K)$

- **Teo. Inclusione tra spazi $L^p_{loc}(\Omega)$:** $1 \leq p < r \leq +\infty \Longrightarrow L^r_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

  ↳ $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in (1,+\infty)$

- **Teo. Fubini–Tonelli:** Sia $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) mis.

  ① Se $f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \, dx \right) dy$ ⊛ (limitati o infin.)

  ② Se f ha segno qualsiasi ma almeno un integr. di ⊛ converge assolutamente (per $|f|$) $\Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$

  ③ Se è noto a priori che $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n}) \Rightarrow$ valgono ① e ②

- **Teo. Convoluzione**: Se $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \overbrace{(f*g)(x)}^{\text{INTEGR. CONVOLUZ.}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ → BEN DEFINITO per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

  e $\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

- **Proprietà convoluzione**:
  - commutativa: $f*g = g*f$
  - associativa: $f*(g*h) = (f*g)*h$
  - simmetrie pari e disp.

$f*g$	f pari	f dispari
g pari	pari	dispari
g dispari	dispari	pari

- **Teo. Disuguaglianza di Young**: Siano $f,g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche $p \in [1,+\infty)$. Allora $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$