# Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Secondo appello. Settembre 2019

A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | |
| Dom 2 | |
| Dom 3 | |
| Es 1 | |
| Es 2 | |
| Es 3 | |
| Tot. | |

| | |
|---|---|
| **Cognome:** | |
| **Nome** | |
| **N° matr. o cod. persona:** | |

**Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)**

**A.** Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

**B.** Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione **e si dimostrino** il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro e il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy.$$

Fare anche un esempio significativo incontrato nel corso, di applicazione teorica di ciascuno dei due teoremi.

**C.** Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione (dimostrarlo); trasformata e dilatazioni (dimostrarlo).

**D.** Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione $x^k$. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

**Svolgere i seguenti esercizi**

**1. (5 punti).** Si consideri l'equazione differenziale di un circuito LR in serie:

$$Li' + Ri = v(t)$$

con $L = \frac{1}{3}, R = 4, i(0) = -2$.

*a.* Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

*b.* Se $v(t)$ è una funzione limitata ma discontinua, quale regolarità ci si aspetta da $i(t)$?

*c.* Calcolare la soluzione esplicita nel caso in cui $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$.

**2. (5 punti).**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x+2i)(x-3i)^2}.$$

*a.* Quali proprietà di $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione $f$?

*b.* Calcolare $\widehat{f}(\xi)$.

**3. (5 punti).** Sia

$$f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1)}(x).$$

*a.* Dimostrare che $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e calcolare $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito e riscrivendo i risultati nel modo più semplice possibile.

*b.* Calcolare il prodotto $(\sin(\pi x))(T_f)'$, semplificare l'espressione ottenuta riscrivendola nel modo più semplice possibile, quindi dire se si tratta di:

-una funzione continua;

-una funzione $L^1_{loc}$ ma discontinua;

-una distribuzione che non si identifica con una funzione.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Secondo appello. Settembre 2019
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | |
| Dom 2 | |
| Dom 3 | |
| Es 1 | |
| Es 2 | |
| Es 3 | |
| Tot. | |

**Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)**

**A.** Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

**Risposta: v. libro di testo, §1.2.1.**

**B.** Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione **e si dimostrino** il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro e il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy.$$

Fare anche un esempio significativo incontrato nel corso, di applicazione teorica di ciascuno dei due teoremi.

**Risposta: v. libro di testo, §2.3.4.**

**C.** Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione (dimostrarlo); trasformata e dilatazioni (dimostrarlo).

**Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.**

**D.** Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione $x^k$. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

**Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.**

**Svolgere i seguenti esercizi**

**1. (5 punti).** Si consideri l'equazione differenziale di un circuito LR in serie:

$$Li' + Ri = v(t)$$

con $L = \frac{1}{3}, R = 4, i(0) = -2$.

*a.* Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

*b.* Se $v(t)$ è una funzione limitata ma discontinua, quale regolarità ci si aspetta da $i(t)$?

*c.* Calcolare la soluzione esplicita nel caso in cui $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$.

Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di Laplace di $i(t), v(t)$ si ha:

$$\frac{1}{3}i' + 4i = v(t)$$

$$\frac{1}{3}(sI(s) - i(0)) + 4I(s) = V(s)$$

$$I(s)\left(\frac{s}{3} + 4\right) = V(s) - \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} I(s) &= \left(\frac{3}{s+12}\right)\left(V(s) - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{s+12} \cdot V(s) - \frac{2}{s+12} \\ &= \mathcal{L}\left(3e^{-12t} * v(t) - 2e^{-12t}\right). \end{aligned}$$

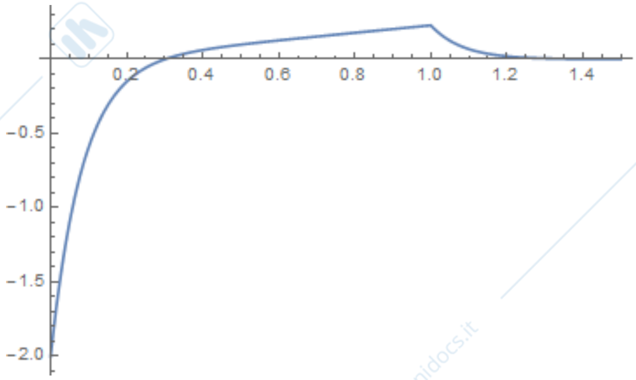
$$i(t) = 3\int_0^t e^{-12(t-\tau)} v(\tau)\, d\tau - 2e^{-12t}.$$

Se $v(t)$ è limitata ma discontinua, ci aspettiamo $i(t)$ continua ma non derivabile nel punto in cui $v$ è discontinua. Se $v(t)$ ha una discontinuità a salto in $t_0$, $i(t)$ avrà un punto angoloso in $t_0$.

Calcoliamo per $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-12(t-\tau)} v(\tau)\, d\tau &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & e^{-12t}\int_0^t e^{12\tau}\tau d\tau \\ \text{se } t \geq 1 & e^{-12t}\int_0^1 e^{12\tau}\tau d\tau \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & e^{-12t}\left[\frac{e^{12\tau}}{12}\left(\tau - \frac{1}{12}\right)\right]_0^t \\ \text{se } t \geq 1 & e^{-12t}\left[\frac{e^{12\tau}}{12}\left(\tau - \frac{1}{12}\right)\right]_0^1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{1}{12}\left(t - \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{144}e^{-12t} \\ \text{se } t \geq 1 & e^{-12t}\left(\frac{11e^{12}+1}{144}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{12}\right) - \frac{95}{48}e^{-12t} \\ \text{se } t \geq 1 & e^{-12t}\left(\frac{11e^{12}-95}{48}\right) \end{cases}$$




**2. (5 punti).** Si consideri la funzione

$$f(x)=\frac{1}{(x+2i)(x-3i)^2}.$$

*a.* Quali proprietà di $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione $f$?

*b.* Calcolare $\widehat{f}(\xi)$.

*a.* La funzione $f$ non è né reale né immaginaria pura, né pari né dispari, non ci aspettiamo particolari simmetrie. Poiché $f\in C^\infty$, $\widehat{f}$ tenderà a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza. Poiché $f\in L^1$, $xf(x)\in L^1$ ma $x^2 f(x)\notin L^1$, $\widehat{f}$ sarà $C^0_*\cap C^1$ ma, ci aspettiamo, non $C^2$.

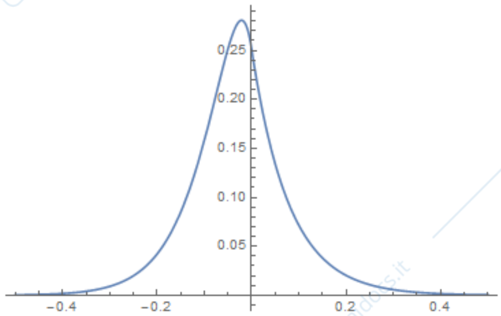
*b.* $f(z)$ ha un polo del 1° ordine in $z=-2i$ e uno del secondo in $z=3i$.

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(x+2i)(x-3i)^2}dx=\begin{cases}\text{se }\xi>0 & -2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z+2i)(z-3i)^2},-2i\right)\\ \text{se }\xi<0 & 2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z+2i)(z-3i)^2},3i\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\text{se }\xi>0 & -2\pi i\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z-3i)^2}\right)_{/z=-2i}\\ \text{se }\xi<0 & 2\pi i\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z+2i)}\right)'_{/z=3i}\end{cases}=\begin{cases}\text{se }\xi>0 & -2\pi i\left(\frac{e^{-4\pi\xi}}{-25}\right)\\ \text{se }\xi<0 & 2\pi i\left(e^{-2\pi i z\xi}\frac{-2\pi i\xi(z+2i)-1}{(z+2i)^2}\right)_{/z=3i}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\text{se }\xi>0 & \frac{2}{25}\pi i e^{-4\pi\xi}\\ \text{se }\xi<0 & \frac{2}{25}\pi i e^{6\pi\xi}(1-10\pi\xi)\end{cases}$$

A posteriori, vediamo che $\widehat{f}(\xi)$ è immaginaria pura, il grafico della sua parte immaginaria è:




**3. (5 punti).** Sia

$$f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1)}(x).$$

*a.* Dimostrare che $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e calcolare $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito e riscrivendo i risultati nel modo più semplice possibile.

*b.* Calcolare il prodotto $(\sin(\pi x))(T_f)'$, semplificare l'espressione ottenuta riscrivendola nel modo più semplice possibile, quindi dire se si tratta di:

-una funzione continua;

-una funzione $L^1_{loc}$ ma discontinua;

-una distribuzione che non si identifica con una funzione.

Poiché $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1)}(x)$ è una funzione limitata, $|g(x)| \leq 1$, si ha $|f(x)| \leq x^2$, $f$ è una funzione lentamente crescente, perciò $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1)}(x)$$

ha discontinuità a salto in tutti i punti interi, il salto ha ampiezza 2 e segno positivo negli interi pari e negativo nei dispari, perciò si ha:

$$\begin{aligned}(T_f)' &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1)}(x) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \delta_n \\ &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n n^2 \delta_n.\end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$
\begin{aligned}
(\sin(\pi x))(T_f)' &= 2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sin(\pi x)\,\chi_{[n,n+1)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n n^2\sin(\pi x)\,\delta_n \\
&= 2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sin(\pi x)\,\chi_{[n,n+1)}(x) \\
&= 2x\left|\sin(\pi x)\right|u(x)
\end{aligned}
$$

dove il primo passaggio dipende dal fatto che $f(x)\,\delta_a = f(a)\,\delta_a$ e $\sin(\pi x)$ si annulla negli interi, mentre il secondo dipende dal fatto che per $n$ pari $\sin(\pi x)$ è positivo in $[n, n+1)$ mentre per $n$ dispari è negativo. Perciò si tratta di una funzione continua: