Complementi su come verificare che un funzionale lineare è una distribuzione o una distribuzione temperata

Marco Bramanti

30 maggio 2019

Queste note contengono osservazioni che sono state fatte a lezione (a parte alcune dimostrazioni), ma non sono sul libro di testo. Lo studente può usare questi criteri per svolgere certi esercizi sulle distribuzioni in modo più semplice rispetto a quello che risulta dall'applicazione delle definizioni.

Facciamo qualche osservazione sul modo in cui si può dimostrare che un assegnato funzionale lineare è effettivamente una distribuzione o una distribuzione temperata.

Per semplicità di notazioni, lavoriamo nel caso di $\mathbb{R}$.

Cominciamo dalla *distribuzioni* su $\mathbb{R}$. Ricordiamo che: si dice che $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, e inoltre

$$\text{se } \phi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ allora } \langle T, \phi_j \rangle \to 0.$$

A sua volta, ricordiamo che "$\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$" significa per definizione che:

1. Esiste $[a, b]$ contenente i supporti di tutte le funzioni ϕ_j e
2. $\phi_j \to 0$ uniformemente in $[a, b]$ e ogni derivata di $\phi_j \to 0$ uniformemente in $[a, b]$.

Supponiamo sia assegnato analiticamente un funzionale lineare $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, e vogliamo dimostrare che è effettivamente una distribuzione.

A volte dall'espressione analitica non è neppure evidente il fatto che per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ questo sia ben definito; mentre spesso è evidente che, se è ben definito, è anche lineare. Il problema quindi consiste nel dimostrare che $\langle T, \phi \rangle$ è ben definito per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ed è continuo (supponendo che la linearità sia evidente dall'espressione analitica di T stesso). Per fare questa verifica, anziché applicare direttamente la definizione, il che porta a lavorare con una successione di funzioni test, si può procedere nel seguente modo, che ricorda quello in cui si dimostra che un operatore (o un funzionale) lineare è continuo su uno spazio vettoriale normato.

Vale il seguente criterio:

Proposizione 1 *Supponiamo che per ogni intervallo $[-N, N]$ esistano una costante $c > 0$ e un intero $k \geq 0$ tale che per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} \phi \subset [-N, N]$ si abbia*

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq c \, \|\phi\|_{C^k[-N,N]}$$

(e inoltre T sia lineare). Allora $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Infatti, sia $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Allora esiste $[-N, N]$ contenente i supporti di tutte le ϕ_j, e in quest'intervallo ϕ_j e tutte le loro derivate tendono a zero uniformemente per $j \to \infty$, in particolare per ogni k fissato si ha che $\|\phi\|_{C^k[-N,N]} \to 0$ per $j \to \infty$. Dunque possiamo scrivere

$$|\langle T, \phi_j \rangle| \leq c \, \|\phi_j\|_{C^k[-N,N]} \to 0,$$

perciò $\langle T, \phi_j \rangle \to 0$ e, poiché supponiamo di sapere già che T sia lineare, T è una distribuzione. ■

Esempio 2 *Dimostriamo che il treno di impulsi*

$$\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$$

è una distribuzione.

Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} \phi \subset [-N, N]$, allora

$$|\langle \Delta_a, \phi \rangle| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(na) \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\phi(na)| .$$

Ora $\phi(na) \neq 0$ solo se $|n| \leq N/a$, perciò

$$|\langle \Delta_a, \phi \rangle| \leq \sum_{|n| \leq N/a} |\phi(na)| \leq \|\phi\|_{C^0[-N,N]} \left(\sum_{|n| \leq N/a} 1 \right) \leq \left(1 + 2\frac{N}{a} \right) \|\phi\|_{C^0[-N,N]} .$$

Poiché Δ_a è evidentemente lineare, in base alla stima precedente è una distribuzione.

Esercizio 3 *Usando la stessa tecnica, provare che Δ_a' è una distribuzione. Ovviamente questo segue anche dal fatto che Δ_a è una distribuzione, perché la derivata di una distribuzione è una distribuzione, ma l'esercizio consiste nel provare direttamente, senza sfruttare l'esempio precedente, che il funzionale*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta'_{na}$$

è una distribuzione.

Veniamo ora alle *distribuzioni temperate*. Ricordiamo che si dice che $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, e inoltre

$$\text{se } \phi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ allora } \langle T, \phi_j \rangle \to 0.$$

A sua volta, ricordiamo che "$\phi_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$" significa per definizione che per ogni coppia di interi non negativi h, k si ha:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \left| \frac{d^h \phi_j}{dx^h}(x) \right| \to 0 \text{ per } j \to \infty.$$

Introduciamo le seguenti *seminorme*:

$$p_n^{(N)}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|^n) \sum_{h=0}^{N} \left| \frac{d^h \phi}{dx^h}(x) \right|.$$

Chiaramente si ha:

$$(\phi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R})) \Leftrightarrow \left(p_n^{(N)}(\phi_j) \to 0 \text{ per ogni } n, N \right).$$

E' quindi immediato (ma comunque spesso utile) il seguente criterio:

Proposizione 4 *Supponiamo che esistano interi n, N e una costante $c > 0$ tali che per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è*

$$|\langle T, \phi \rangle| \le c p_n^{(N)}(\phi)$$

(e inoltre sia T lineare). Allora $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Si può dimostrare (con un po' più di lavoro), che vale anche il viceversa: se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ allora esistono interi n, N e una costante $c > 0$ tali che per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è

$$|\langle T, \phi \rangle| \le c p_n^{(N)}(\phi).$$

Esempio 5 *Mostriamo come applicazione del principio precedente che:*

1. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, \infty]$ allora $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ è una funzione lentamente crescente, cioè esistono $c, N > 0$ tali che

$$|f(x)| \le C \left(1 + |x|^N\right),$$

allora $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Dimostrazione di 1.

$$\begin{aligned}
|\langle T, \phi \rangle| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\phi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+x^2} \left\{ \left(1+x^2\right) |\phi(x)| \right\} dx \\
&\le p_2^{(0)}(\phi) \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+x^2} dx \\
&\le p_2^{(0)}(\phi) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \left\| \frac{1}{1+x^2} \right\|_{L^q(\mathbb{R})} \\
&= c p_2^{(0)}(\phi)
\end{aligned}$$

(abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder, e sfruttato il fatto che $\frac{1}{1+x^2} \in L^q(\mathbb{R})$ *per ogni* $q \in [1, \infty]$.

Dimostrazione di 2.

$$\begin{aligned}|\langle T, \phi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, |\phi(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} c \left(1 + |x|^N\right) |\phi(x)| \, dx \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \left\{ \left(1 + |x|^N\right) \left(1 + x^2\right) |\phi(x)| \right\} dx \\ &\leq c p_{N+2}^{(0)}(\phi) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = c p_{N+2}^{(0)}(\phi).\end{aligned}$$

Esercizio 6 *Usando il criterio precedente, mostrare che il treno di impulsi* Δ_a *è una distribuzione temperata. (Suggerimento: moltiplicare e dividere per un'opportuna quantità per sfruttare una serie numerica convergente).*

Nelle argomentazioni che utilizzano il criterio della Proposizione 4, talvolta è utile anche la seguente:

Proposizione 7 *Per ogni coppia di interi non negativi* n, k *esiste una costante* $c > 0$ *tale che*

$$p_n^{(k)}\left(\widehat{\phi}\right) \leq c p_{k+2}^{(n)}(\phi) \tag{1}$$

per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Mostriamo subito un esempio dell'utilità di questa disuguaglianza. Dimostriamo che *la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata è una distribuzione temperata.*

Infatti, sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, allora per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\left|\left\langle \widehat{T}, \phi \right\rangle\right| = \left|\left\langle T, \widehat{\phi} \right\rangle\right|$$

e poiché T per ipotesi è una distribuzione temperata, esistono n, k tali che

$$\leq c p_n^{(k)}\left(\widehat{\phi}\right)$$

e per la Proposizione 4 si ha

$$\leq c p_{k+2}^{(n)}(\phi)$$

ma allora la catena di disguguaglianze

$$\left|\left\langle \widehat{T}, \phi \right\rangle\right| \leq c p_{k+2}^{(n)}(\phi)$$

implica, per la Proposizione 4, che $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Proviamo adesso la (1). Per stimare $p_n^{(k)}\left(\widehat{\phi}\right)$ scriviamo anzitutto:

$$\begin{aligned}
\xi^n \frac{d^k}{d\xi^k}\left(\widehat{\phi}\right) &= \xi^n \mathcal{F}\left(\left(-2\pi i x\right)^k \phi\left(x\right)\right)\left(\xi\right) \\
&= \mathcal{F}\left(\frac{1}{\left(2\pi i\right)^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(-2\pi i x\right)^k \phi\left(x\right)\right)\right) \\
&= c_{n,k}\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k \phi\left(x\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Ricordiamo ora che per qualsiasi funzione $L^1\left(\mathbb{R}\right)$ si ha

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\widehat{f}\left(\xi\right)\right| \leq \left\|f\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

perciò

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\xi^n \frac{d^k}{d\xi^k}\left(\widehat{\phi}\right)\left(\xi\right)\right| &= c_{n,k}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi\left(x\right)\right)\right)\left(\xi\right)\right| \\
&\leq c_{n,k}\left\|\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi\left(x\right)\right)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= c_{n,k}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\cdot\left\{\left(1+x^2\right)\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi\left(x\right)\right)\right|\right\}dx.
\end{aligned}$$

Ora riflettiamo sul fatto che la funzione

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi\left(x\right)\right)$$

in base alle regole di calcolo delle derivate, è una combinazione lineare delle funzioni $\phi, \phi', ..., \phi^{(n)}$ con coefficienti che del tipo $1, x, x^2, ..., x^k$ perciò

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi\left(x\right)\right)\right| \leq c\cdot p_k^{(n)}\left(\phi\right)$$

e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(1+x^2\right)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi\left(x\right)\right)\right| \leq c\cdot p_{k+2}^{(n)}\left(\phi\right).$$

Dunque

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\xi^n\frac{d^k}{d\xi^k}\left(\widehat{\phi}\right)\left(\xi\right)\right| \leq c\cdot p_{k+2}^{(n)}\left(\phi\right)\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}$$

e quindi

$$p_n^{(k)}\left(\widehat{\phi}\right) \leq c p_{k+2}^{(n)}\left(\phi\right).$$