

Compiti di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate

a.a. 2020/2021. Politecnico di Milano

Settimana 6

Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la sesta settimana:

Libro di testo: Cap.4, §4.3, 4.4. Cap.7, §7.1.1 (in parte).

Polinomi ortogonali. Gli Esercizi 4.2 e 4.3 (costruzione dei primi polinomi di Legendre e polinomi di Hermite mediante ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) sono stati svolti a lezione, hanno un significato teorico e siete invitati a svolgerli nuovamente, insieme all'Esercizio 4.4, analogo, che riguarda i polinomi di Laguerre, di cui non si è parlato a lezione.

Svolgere i seguenti esercizi sulla trasformata di Fourier

Esercizio. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere, in base alla teoria, su $\hat{f}(\xi)$, sui seguenti punti:

- se \hat{f} eventualmente è pari o dispari;
- se \hat{f} eventualmente è reale o immaginaria pura;
- con che velocità \hat{f} tende a zero all'infinito (cioè per quale n si può affermare che $\hat{f}(\xi) = o(1/\xi^n)$).

Come funzioni, considerare quelle dell'Esercizio 7.1. (a) – (h) del libro di testo, e inoltre:

$$\begin{aligned} (i) \quad f(x) &= (1-x^2) \chi_{(-1,1)}(x) \\ (l) \quad f(x) &= e^{-|x|} \chi_{(-a,a)}(x) \\ (m) \quad f(x) &= x^2 e^{-|x|} \end{aligned}$$

Calcolare quindi $\hat{f}(\xi)$ per le funzioni:

$$(e), (f), (g), (i), (l).$$

in base alla definizione. Verificare che la trasformata calcolata ha le proprietà previste.

Esercizio 2 Sia $f(x) = e^{-x} \chi_{(0,+\infty)}(x)$.

- a. Calcolare $f * f$
- b. Calcolare \hat{f}
- c. Calcolare $\mathcal{F}(f * f)$ in base alla formula della trasformata della convoluzione.
- d. Calcolare ora $\mathcal{F}(f * f)$ sfruttando l'espressione esplicita di $f * f$, calcolata al punto a, e il teorema sulla derivata della trasformata (ovviamente c e d devono dare lo stesso risultato. Stiamo semplicemente facendo esercizi sulle proprietà operatoriali della trasformata).

Esercizio 3 Dire per quali delle seguenti funzioni esiste la trasformata di Fourier (in base alla definizione data fin qui a lezione):

- | | | | |
|-----|---------------------|-----|-------------------------|
| (a) | $\frac{x+1}{x^2+4}$ | (d) | $\frac{1}{x^2}$ |
| (b) | $\sin x$ | (e) | e^{-x} |
| (c) | 1 | (f) | $\chi_{(0,+\infty)}(x)$ |

Esercizio 4 A lezione è stata fatta la seguente affermazione (che ci è servita per enunciare il teorema sulla trasformata della derivata sotto le ipotesi migliori). La formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

in analisi 1 è stata dimostrata supponendo che f e g siano entrambe derivabili in tutto $[a, b]$. In effetti vale sotto le seguenti ipotesi più deboli:

f e g sono continue in $[a, b]$; inoltre sono derivabili in $[a, b]$ a eccezione eventualmente di un numero finito di punti in cui esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata prima (cioè: f, g sono continue ma possono avere un numero finito punti angolosi).

Si chiede di dimostrarla. E' sufficiente considerare il caso in cui g è derivabile in tutto $[a, b]$ e f è continua in $[a, b]$ ed è derivabile tranne un unico punto angoloso $c \in (a, b)$. Per dimostrarla, spezzare $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$, applicare la formula di integrazione per parti a ciascuno dei due integrali (perché è lecito?) e vedere cosa succede. Il caso generale si ottiene poi generalizzando la procedura precedente.