

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Terzo appello. Gennaio 2019
A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Operatori lineari continui tra due spazi vettoriali normati: si enunci con precisione il teorema che sta alla base della definizione di “operatore lineare continuo” (equivalenza tra tre condizioni), si dia quindi questa definizione e la definizione di norma di un operatore. Si facciano diversi esempi di operatori (o classi di operatori) lineari continui tra spazi di funzioni.

B. (6 punti). Enunciare e dimostrare il principio di indeterminazione di Heisenberg nella versione incontrata in questo corso, relativo alla trasformata di Fourier di funzioni a decrescenza rapida, e verificare che per le funzioni gaussiane $e^{-\pi x^2}$ nella disuguaglianza vale il segno di uguale.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k . (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

D. (6 punti). **Dimostrare** che, in un circuito RC , il sistema che associa alla tensione di ingresso $x(t)$ la tensione $V(t)$ ai capi della resistenza, che soddisfa l'equazione

$$V'(t) + \frac{V(t)}{RC} = x'(t),$$

è:

- un filtro;
 - un filtro realizzabile;
 - un filtro passa-alto,
- spiegando cosa significa ognuno di questi termini.

Risolvere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione differenziale di un circuito RL in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) = v(t)$$

con $L = 3$, $R = \frac{1}{2}$ e condizione iniziale $i(0) = 2$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Calcolare quindi la corrente corrispondente a $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$.

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 3}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

b. Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

3. (5 punti). Sia

$$f(x) = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x).$$

a. Dopo aver spiegato perché la funzione f definisce una distribuzione temperata, calcolare la derivata distribuzionale $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito e semplificando l'espressione ottenuta.

b. Quindi scrivere esplicitamente $\langle (T_f)', \phi \rangle$ per ϕ funzione test ("esplicitamente" significa: mediante un'espressione che coinvolge ϕ ma non coinvolge ϕ'). Nell'espressione ottenuta c'è qualche differenza tra il considerare $(T_f)'$ come distribuzione temperata o come semplice distribuzione, cioè tra il supporre $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ oppure $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Terzo appello. Gennaio 2019
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Operatori lineari continui tra due spazi vettoriali normati: si enunci con precisione il teorema che sta alla base della definizione di “operatore lineare continuo” (equivalenza tra tre condizioni), si dia quindi questa definizione e la definizione di norma di un operatore. Si facciano diversi esempi di operatori (o classi di operatori) lineari continui tra spazi di funzioni.

Risposta: v. libro di testo, §3.1

B. (6 punti). Enunciare e dimostrare il principio di indeterminazione di Heisenberg nella versione incontrata in questo corso, relativo alla trasformata di Fourier di funzioni a decrescenza rapida, e verificare che per le funzioni gaussiane $e^{-\pi x^2}$ nella disuguaglianza vale il segno di uguale.

Risposta: v. libro di testo, §7.4.3.1.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k . (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.

D. (6 punti). **Dimostrare** che, in un circuito RC , il sistema che associa alla tensione di ingresso $x(t)$ la tensione $V(t)$ ai capi della resistenza, che soddisfa l'equazione

$$V'(t) + \frac{V(t)}{RC} = x'(t),$$

è:

- un filtro;
 - un filtro realizzabile;
 - un filtro passa-alto,
- spiegando cosa significa ognuno di questi termini.

Risposta: v. libro di testo, §10.1-10.2.

Risolvere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri l'equazione differenziale di un circuito RL in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) = v(t)$$

con $L = 3$, $R = \frac{1}{2}$ e condizione iniziale $i(0) = 2$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Calcolare quindi la corrente corrispondente a $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$.

a. Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri e ponendo $I(s) = \mathcal{L}(i)(s)$, $V(s) = \mathcal{L}(v)(s)$ si ha:

$$\begin{aligned} L(sI(s) - i(0)) + RI(s) &= V(s) \\ (Ls + R)I(s) &= V(s) + Li(0) \\ I(s) &= \frac{V(s)}{Ls + R} + \frac{Li(0)}{Ls + R} \\ &= V(s) \cdot \frac{1}{3s + \frac{1}{2}} + \frac{6}{3s + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3s + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{s + \frac{1}{6}} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

$$\frac{6}{3s + \frac{1}{2}} = \mathcal{L}\left(2e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

$$I(s) = \mathcal{L}\left(2e^{-\frac{t}{6}} + v(t) * \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

$$i(t) = 2e^{-\frac{t}{6}} + v(t) * \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}} = 2e^{-\frac{t}{6}} + \frac{1}{3} \int_0^t e^{-\left(\frac{t-\tau}{6}\right)} v(\tau) d\tau.$$

b. Calcoliamo ora, per $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$,

$$\begin{aligned} i(t) &= 2e^{-\frac{t}{6}} + \frac{1}{3} \int_0^t e^{-\left(\frac{t-\tau}{6}\right)} \tau \chi_{(0,1)}(\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & 2e^{-\frac{t}{6}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{6}} \tau d\tau \\ \text{se } t > 1 & 2e^{-\frac{t}{6}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}} \int_0^1 e^{\frac{\tau}{6}} \tau d\tau \end{cases} \end{aligned}$$

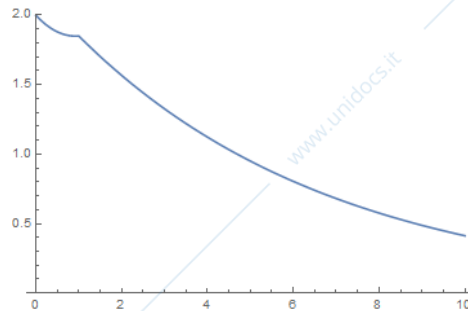
Calcoliamo anzitutto

$$\begin{aligned} \int \tau e^{\frac{\tau}{6}} d\tau &= 6\tau e^{\frac{\tau}{6}} - \int 6e^{\frac{\tau}{6}} d\tau = 6\tau e^{\frac{\tau}{6}} - 36e^{\frac{\tau}{6}} \\ \int_0^t e^{\frac{\tau}{6}} \tau d\tau &= [6\tau e^{\frac{\tau}{6}} - 36e^{\frac{\tau}{6}}]_0^t = 6te^{\frac{t}{6}} - 36e^{\frac{t}{6}} + 36 = 6e^{\frac{t}{6}}(t - 6) + 36 \\ \int_0^1 e^{\frac{\tau}{6}} \tau d\tau &= [6\tau e^{\frac{\tau}{6}} - 36e^{\frac{\tau}{6}}]_0^1 = 6e^{\frac{1}{6}} - 36e^{\frac{1}{6}} + 36 = 6\left(6 - 5e^{\frac{1}{6}}\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & 2e^{-\frac{t}{6}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}} \left[6e^{\frac{t}{6}} (t-6) + 36 \right] \\ \text{se } t > 1 & 2e^{-\frac{t}{6}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}} \left[6 \left(6 - 5e^{\frac{1}{6}} \right) \right] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } t < 1 & 14e^{-\frac{t}{6}} + 2(t-6) \\ \text{se } t > 1 & 2e^{-\frac{t}{6}} \left(7 - 5e^{\frac{1}{6}} \right) \end{cases}$$



2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 3}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

b. Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

a. f è reale e dispari, quindi \hat{f} sarà immaginaria pura e dispari. $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ quindi $\hat{f} \in C_*^0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ (ma $x^2f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$) quindi ci aspettiamo che sia $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ ma $\hat{f} \notin C^2(\mathbb{R})$. $f \in C^\infty$ quindi $\hat{f}(\xi) = o(1/|\xi|^k)$ per ogni k , per $\xi \rightarrow \pm\infty$.

b. Calcoliamo per $x > 0$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 3} e^{-2\pi i \xi x} dx,$$

e poi simmetrizzeremo dispari.

Poiché

$$z^4 + 4z^2 + 3 = (z^2 + 1)(z^2 + 3) = 0 \text{ per } z = \pm i, z = \pm i\sqrt{3},$$

la funzione $f(z) = \frac{z}{z^4 + 4z^2 + 3} e^{-2\pi i \xi z}$ ha poli del 1° ordine in $\pm i, z = \pm i\sqrt{3}$.

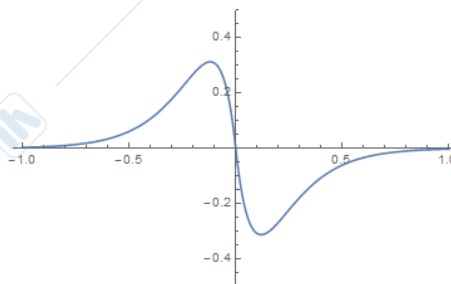
Per $\xi > 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \left(\frac{z}{z^4 + 4z^2 + 3} e^{-2\pi i \xi z}, -i \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{z}{z^4 + 4z^2 + 3} e^{-2\pi i \xi z}, -i\sqrt{3} \right) \right\} \\ &= -2\pi i \left\{ \left(\frac{z}{4z^3 + 8z} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-i} + \left(\frac{z}{4z^3 + 8z} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-i\sqrt{3}} \right\} \\ &= -\frac{\pi i}{2} \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2 + 2} \right)_{/z=-i} + \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2 + 2} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-i\sqrt{3}} \right\} \\ &= -\frac{\pi i}{2} \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi \xi}}{1} \right) + \left(\frac{e^{-2\pi \sqrt{3} \xi}}{-1} \right) \right\} = \frac{\pi i}{2} \left\{ e^{-2\pi \sqrt{3} \xi} - e^{-2\pi \xi} \right\}.\end{aligned}$$

Simmettizzando dispari si ha:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi i}{2} (\operatorname{sgn} x) \left\{ e^{-2\pi \sqrt{3} |\xi|} - e^{-2\pi |\xi|} \right\}.$$

Grafico di $\operatorname{Im} \widehat{f}(\xi)$:



3. (5 punti). Sia

$$f(x) = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x).$$

a. Dopo aver spiegato perché la funzione f definisce una distribuzione temperata, calcolare la derivata distribuzionale $(T_f)'$, giustificando il procedimento seguito e semplificando l'espressione ottenuta.

b. Quindi scrivere esplicitamente $\langle (T_f)', \phi \rangle$ per ϕ funzione test ("esplicitamente" significa: mediante un'espressione che coinvolge ϕ ma non coinvolge ϕ'). Nell'espressione ottenuta c'è qualche differenza tra il considerare $(T_f)'$ come distribuzione temperata o come semplice distribuzione, cioè tra il supporre $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ oppure $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

a. Gli intervalli $[k^2, k^2 + 1]$, cioè $[1, 2], [4, 5], [9, 10], [16, 17] \dots$ sono tutti disgiunti, perciò

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x)$$

è una funzione $L^\infty(\mathbb{R})$, che assume solo valori 0 e 1. Moltiplicandola per x^2 o per x si ottiene una funzione localmente integrabile e “lentamente crescente”, in particolare:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq x^2, \\ |g(x)| &\leq x \end{aligned}$$

perciò f e g rientrano nelle classi di funzioni che abbiamo visto definiscono una distribuzione temperata.

La funzione $f(x)$ è C^1 in \mathbb{R} privato dei punti k^2 e $k^2 + 1$ (per $k = 1, 2, 3, \dots$); nei punti k^2 presenta discontinuità a salto con un salto di $(k^2)^2 = k^4$, mentre nei punti $k^2 + 1$ presenta discontinuità a salto con un salto di $-(k^2 + 1)^2$. Pertanto:

$$(T_f)' = 2x \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (k^4 \delta_{k^2} - (k^2 + 1)^2 \delta_{k^2+1}).$$

b.

$$\begin{aligned} \langle T_f', \phi \rangle &= \left\langle 2x \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (k^4 \delta_{k^2} - (k^2 + 1)^2 \delta_{k^2+1}), \phi \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k^2}^{k^2+1} 2x \phi(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} (k^4 \phi(k^2) - (k^2 + 1)^2 \phi(k^2 + 1)). \end{aligned}$$

Notiamo che se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ le serie scritte in realtà sono somme finite, mentre se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sono effettivamente delle serie (convergenti).