Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Primo appello. 30 Giugno 2020
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Scaglione 1 - ore 9.00

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a,b])$ è di Banach.

B. (6 punti). Operatori lineari continui tra due spazi vettoriali normati: si enunci con precisione il teorema che sta alla base della definizione di "operatore lineare continuo" (equivalenza tra tre condizioni), si dia quindi questa definizione e la definizione di norma di un operatore. Si facciano *diversi esempi* di operatori lineari continui tra spazi di funzioni, e *un esempio* di operatore lineare non continuo.

C. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R})$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata di una funzione pari, di una funzione dispari (**dimostrarlo**); trasformata della convoluzione (**dimostrarlo**); trasformata e dilatazioni.

D. (6 punti). Le operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, moltiplicazione per una funzione, di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: mostrare come si arriva alle definizioni di queste operazioni in modo che siano un'estensione degli analoghi concetti per le funzioni. Esemplificare poi queste operazioni nel caso della distribuzione $T = \delta_{x_0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 9x^2 + 20}$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui.

2. (5 punti). Si consideri l'equazione differenziale di un circuito LR in serie:

$$Li' + Ri = v(t)$$

con $L = 2, R = \frac{1}{5}, i(0) = 3.$

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Calcolare la soluzione esplicita nel caso in cui $v(t) = \chi_{(0,10)}(t)$.

3. (5 punti). Si consideri la distribuzione:

$$T = \tau_2 \left(D_3 \left(\cos(\pi x) \, \delta_1' \right) \right).$$

a. Calcolare T riscrivendo nel modo più semplice il risultato. (Si chiede cioè di calcolare $\langle T, \phi \rangle$ riscrivendola nel modo più semplice, fino a poter riscrivere $T = ...$ in forma esplicita, senza più ϕ).

b. Quindi (sfruttando l'espressione semplice ed esplicita ottenuta per T e *non* quella data inizialmente nel testo) calcolare la convoluzione di T con la funzione $f(x) = \sin(3x)$, riscrivendo il risultato nel modo più semplice ed esplicito. Richiamare le proprietà utilizzate nel calcolo della convoluzione.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Primo appello. 30 Giugno 2020
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Scaglione 2 - ore 15.00

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Si considerino i seguenti spazi di funzioni:

$$C^0[a,b], C^0(a,b), C^0(\mathbb{R}), C^0_*(\mathbb{R}), C^0_0(\mathbb{R}), C^1[a,b], C^\infty_0(\mathbb{R}).$$

Di ciascuno di questi si dica se è uno spazio vettoriale, uno spazio vettoriale normato (con quale o quali norme), uno spazio vettoriale normato completo (con quale norma), giustificando le proprie affermazioni. Si precisi anche quali inclusioni valgono eventualmente tra questi spazi.

B. (6 punti). Enunciare il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue e fare *esempi di applicazioni teoriche* di questo teorema incontrate nel corso. Confrontare con il teorema di passaggio al limite per l'integrale di Riemann che si è incontrato nel corso.

C. (6 punti). La trasformata di Fourier in L^2: dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà, **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ricavare (con i calcoli dettagliati) la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspide, oppure di discontinuità a salto.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia
$$f(x) = e^{-x^2} \sin x.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e considerando nota la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

2. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

dove $i(0) = 1, q_0 = 2, L = 3, C = 2$. Si richiede di risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

3. (5 punti). **3. (5 punti).** Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 4}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Primo appello. 30 Giugno 2020

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Scaglione 1 - ore 9.00

Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni a valori reali, enunciare e **dimostrare** il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi **dimostrare** che lo spazio $C^0([a,b])$ è di Banach.

B. (6 punti). Operatori lineari continui tra due spazi vettoriali normati: si enunci con precisione il teorema che sta alla base della definizione di "operatore lineare continuo" (equivalenza tra tre condizioni), si dia quindi questa definizione e la definizione di norma di un operatore. Si facciano *diversi esempi* di operatori lineari continui tra spazi di funzioni, e *un esempio* di operatore lineare non continuo.

C. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R})$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata di una funzione pari, di una funzione dispari (**dimostrarlo**); trasformata della convoluzione (**dimostrarlo**); trasformata e dilatazioni.

D. (6 punti). Le operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, moltiplicazione per una funzione, di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: mostrare come si arriva alle definizioni di queste operazioni in modo che siano un'estensione degli analoghi concetti per le funzioni. Esemplificare poi queste operazioni nel caso della distribuzione $T = \delta_{x_0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 9x^2 + 20}$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui.

a. f reale, dispari, C^∞, $f \in L^1, xf \in L^1, x^2 f \notin L^1$. Quindi $\widehat{f}$ immaginaria pura, dispari, tende a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza $1/x^n$, $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$, ci aspettiamo $\widehat{f} \notin C^2(\mathbb{R})$.

b. Calcolo $\widehat{f}$ per $\xi > 0$ e poi simmetrizzo.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^4 + 9x^2 + 20} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

$z^4 + 9z^2 + 20 = \left(z^2 + 5\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$ per $z = \pm i\sqrt{5}, z = \pm 2i$. Poli del prim'ordine. Per $\xi > 0$ è

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2+5)(z^2+4)} e^{-2\pi i \xi z}, -i\sqrt{5} \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2+5)(z^2+4)} e^{-2\pi i \xi z}, -2i \right) \right\} \\
&= -2\pi i \left\{ \left(\frac{z}{2z(z^2+4)} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-i\sqrt{5}} + \left(\frac{z}{(z^2+5)\,2z} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-2i} \right\} \\
&= -\pi i \left\{ \frac{1}{(-5+4)} e^{-2\sqrt{5}\pi\xi} + \frac{1}{(-4+5)} e^{-4\pi\xi} \right\} = \pi i \left\{ e^{-2\sqrt{5}\pi\xi} - e^{-4\pi\xi} \right\}.
\end{aligned}$$

Quindi per $\xi \in \mathbb{R}$, simmetrizzando dispari,

$$\widehat{f}(\xi) = \pi i \operatorname{sgn}(x) \left\{ e^{-2\sqrt{5}\pi|\xi|} - e^{-4\pi|\xi|} \right\}.$$

2. (5 punti). Si consideri l'equazione differenziale di un circuito LR in serie:

$$Li' + Ri = v(t)$$

con $L = 2, R = \frac{1}{5}, i(0) = 3$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Calcolare la soluzione esplicita nel caso in cui $v(t) = \chi_{(0,10)}(t)$.

a. Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di Laplace di $i(t), v(t)$ si ha:

$$2i' + \frac{1}{5}i = v(t)$$

$$2(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{5}I(s) = V(s)$$

$$I(s)\left(2s + \frac{1}{5}\right) = V(s) + 6$$

$$I(s) = \left(\frac{5}{10s+1}\right)(V(s)+6) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{1}{10}} \cdot V(s) + \frac{3}{s+\frac{1}{10}}$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{10}} * v(t) + 3e^{-\frac{t}{10}}\right).$$

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{10}} v(\tau)\, d\tau + 3e^{-\frac{t}{10}}.$$

b. Calcoliamo per $v(t) = \chi_{(0,10)}(t)$.

$$\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{10}} v(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \text{se } t < 10 & e^{-\frac{t}{10}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{10}} d\tau = 10e^{-\frac{t}{10}}\left(e^{\frac{t}{10}} - 1\right) = 10\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) \\ \text{se } t \geq 10 & e^{-\frac{t}{10}} \int_0^{10} e^{\frac{\tau}{10}} d\tau = 10e^{-\frac{t}{10}}(e-1) \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 10 & 5\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) + 3e^{-\frac{t}{10}} = 5 - 2e^{-\frac{t}{10}} \\ \text{se } t \geq 10 & 5e^{-\frac{t}{10}}(e-1) + 3e^{-\frac{t}{10}} = e^{-\frac{t}{10}}(5e-2) \end{cases}$$

3. (5 punti). Si consideri la distribuzione:

$$T = \tau_2\left(D_3\left(\cos(\pi x)\, \delta_1'\right)\right).$$

a. Calcolare T riscrivendo nel modo più semplice il risultato. (Si chiede cioè di calcolare $\langle T, \phi\rangle$ riscrivendola nel modo più semplice, fino a poter riscrivere $T = ...$ in forma esplicita, senza più ϕ).

b. Quindi (sfruttando l'espressione semplice ed esplicita ottenuta per T e *non* quella data inizialmente nel testo) calcolare la convoluzione di T con la funzione $f(x) = \sin(3x)$, riscrivendo il risultato nel modo più semplice ed esplicito. Richiamare le proprietà utilizzate nel calcolo della convoluzione.

a.

$$\langle \tau_2(D_3(\cos(\pi x)\, \delta_1')), \phi\rangle = \langle D_3(\cos(\pi x)\, \delta_1'), \phi(x-2)\rangle$$

$$= \frac{1}{3}\left\langle \cos(\pi x)\, \delta_1', \phi\left(\frac{x}{3} - 2\right)\right\rangle = \frac{1}{3}\left\langle \delta_1', \cos(\pi x)\, \phi\left(\frac{x}{3} - 2\right)\right\rangle$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos(\pi x)\, \phi\left(\frac{x}{3} - 2\right)\right)'(1) = -\frac{1}{3}\left(-\pi \sin(\pi x)\, \phi\left(\frac{x}{3} - 2\right) + \cos(\pi x)\frac{1}{3}\phi'\left(\frac{x}{3} - 2\right)\right)_{/x=1}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\phi'\left(\frac{1}{3} - 2\right)\right) = \frac{1}{9}\phi'\left(-\frac{5}{3}\right) = \left\langle -\frac{1}{9}\delta'_{-\frac{5}{3}}, \phi\right\rangle.$$

Perciò

$$T = -\frac{1}{9}\delta'_{-\frac{5}{3}}.$$

b. Sappiamo che per ogni distribuzione S è

$$\begin{aligned} S * \delta_{x_0} &= \tau_{-x_0} S \\ S * \delta'_{x_0} &= (S * \delta_{x_0})' = (\tau_{-x_0} S)' = \tau_{-x_0}(S') \end{aligned}$$

Nel nostro caso $S = T_{\sin(3x)}$, perciò

$$\begin{aligned} T * \sin(3x) &= -\frac{1}{9}\delta'_{-\frac{5}{3}} * \sin(\pi x) = -\frac{1}{9}\tau_{\frac{5}{3}}(\sin(3x))' \\ &= -\frac{3}{9}\tau_{\frac{5}{3}}(\cos(3x)) = -\frac{1}{3}\cos\left(3\left(x + \frac{5}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}\cos(3x+5). \end{aligned}$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Primo appello. 30 Giugno 2020
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Scaglione 2 - ore 15.00
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)
A. (6 punti). Si considerino i seguenti spazi di funzioni:

$$C^0[a,b], C^0(a,b), C^0(\mathbb{R}), C^0_*(\mathbb{R}), C^0_0(\mathbb{R}), C^1[a,b], C^\infty_0(\mathbb{R}).$$

Di ciascuno di questi si dica se è uno spazio vettoriale, uno spazio vettoriale normato (con quale o quali norme), uno spazio vettoriale normato completo (con quale norma), giustificando le proprie affermazioni. Si precisi anche quali inclusioni valgono eventualmente tra questi spazi.

B. (6 punti). Enunciare il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue e fare *esempi di applicazioni teoriche* di questo teorema incontrate nel corso. Confrontare con il teorema di passaggio al limite per l'integrale di Riemann che si è incontrato nel corso.

C. (6 punti). La trasformata di Fourier in L^2: dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà, **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ricavare (con i calcoli dettagliati) la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspide, oppure di discontinuità a salto.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = e^{-x^2} \sin x.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e considerando nota la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

a. La f è reale, dispari, $\widehat{f}$ sarà immaginaria pura e dispari. Poiché $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sarà anche $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

b. Calcoliamo $\widehat{f}$ con le seguenti considerazioni:

$$\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$$

$$g(x) = e^{-\pi x^2} \Rightarrow e^{-x^2} = g^{1/\sqrt{\pi}}(x)$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(g^{1/\sqrt{\pi}}\right)(\xi) = \widehat{g}_{1/\sqrt{\pi}}(\xi) = \sqrt{\pi}\widehat{g}\left(\sqrt{\pi}\xi\right) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$$

Quindi usiamo la formula del prodotto per un esponenziale complesso:

$$\mathcal{F}\left(e^{2\pi i a x} g(x)\right)(\xi) = \widehat{g}(\xi - a)$$

$$\mathcal{F}(g(x)\sin x)(\xi) = \mathcal{F}\left(g(x)\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)(\xi) = \frac{1}{2i}\left(\widehat{g}\left(\xi - \frac{1}{2\pi}\right) - \widehat{g}\left(\xi + \frac{1}{2\pi}\right)\right).$$

Perciò:

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\sin x\right)(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(e^{-\pi^2\left(\xi - \frac{1}{2\pi}\right)^2} - e^{-\pi^2\left(\xi + \frac{1}{2\pi}\right)^2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}i\left(e^{-\pi^2\left(\xi - \frac{1}{2\pi}\right)^2} - e^{-\pi^2\left(\xi + \frac{1}{2\pi}\right)^2}\right)$$

2. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

dove $i(0) = 1, q_0 = 2, L = 3, C = 2$. Si richiede di risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di Laplace di $i(t), v(t)$, rispettivamente, si ha:

$$3i'(t) + \frac{1}{2}\left(2 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$
$$3(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s} + \frac{I(s)}{s}\right) = V(s)$$
$$3sI(s) - 3 + \frac{1}{s} + \frac{I(s)}{2s} = V(s)$$
$$I(s)\left(3s + \frac{1}{2s}\right) = V(s) + 3 - \frac{1}{s}$$
$$I(s)\left(\frac{6s^2+1}{2s}\right) = V(s) + \frac{3s-1}{s}$$

$$I(s) = \left(\frac{2s}{6s^2+1}\right)V(s) + \frac{6s-2}{6s^2+1} \equiv H(s)V(s) + G(s).$$

Ora:

$$H(s) = \frac{2s}{6s^2+1} = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+\frac{1}{6}} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right)$$
$$G(s) = \frac{6s-2}{6s^2+1} = \frac{s-\frac{1}{3}}{s^2+\frac{1}{6}} = \frac{s}{s^2+\frac{1}{6}} - \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{s^2+\frac{1}{6}}$$
$$= \mathcal{L}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right).$$

$$I(s) = \mathcal{L}(v * h + g)(s)$$
$$i(t) = (v * h)(t) + g(t)$$
$$= \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{3}\int_0^t \cos\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{6}}\right) v(\tau)\,d\tau.$$

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2+4}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata.

$$\frac{x^3+2x^2}{x^2+4} = x + 2 - \frac{(4x+8)}{x^2+4}$$
$$\mathcal{F}(T_f) = \mathcal{F}(x) + 2\mathcal{F}(1) - 4\mathcal{F}\left(\frac{x+2}{x^2+4}\right).$$

Ora:

$$\mathcal{F}(1) = \delta$$
$$\mathcal{F}(x) = -\frac{\delta'}{2\pi i}$$

mentre $g(x) = \frac{x+2}{x^2+4}$ è una funzione L^2, la cui trasformata si calcola coi residui.
Poli in $z = \pm 2i$, del prim'ordine.

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x+2}{x^2+4} e^{-2\pi i x\xi} dx = \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^2+4} e^{-2\pi i z\xi}, -2i\right) \\ \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^2+4} e^{-2\pi i z\xi}, 2i\right) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{z+2}{2z} e^{-2\pi i z\xi}\right)_{/z=-2i} = -2\pi i \left(\frac{-2i+2}{-4i} e^{-4\pi\xi}\right) = \pi(-i+1) e^{-4\pi\xi} \\ \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{z+2}{2z} e^{-2\pi i z\xi}\right)_{/z=2i} = 2\pi i \left(\frac{2i+2}{4i} e^{4\pi\xi}\right) = \pi(i+1) e^{4\pi\xi} \end{cases}$$
$$= \pi e^{-4\pi|\xi|} (1 - i \operatorname{sgn}(\xi)).$$

$$\mathcal{F}(T_f) = \frac{i\delta'}{2\pi} + 2\delta - 4\pi e^{-4\pi|\xi|} (1 - i \operatorname{sgn}(\xi)).$$