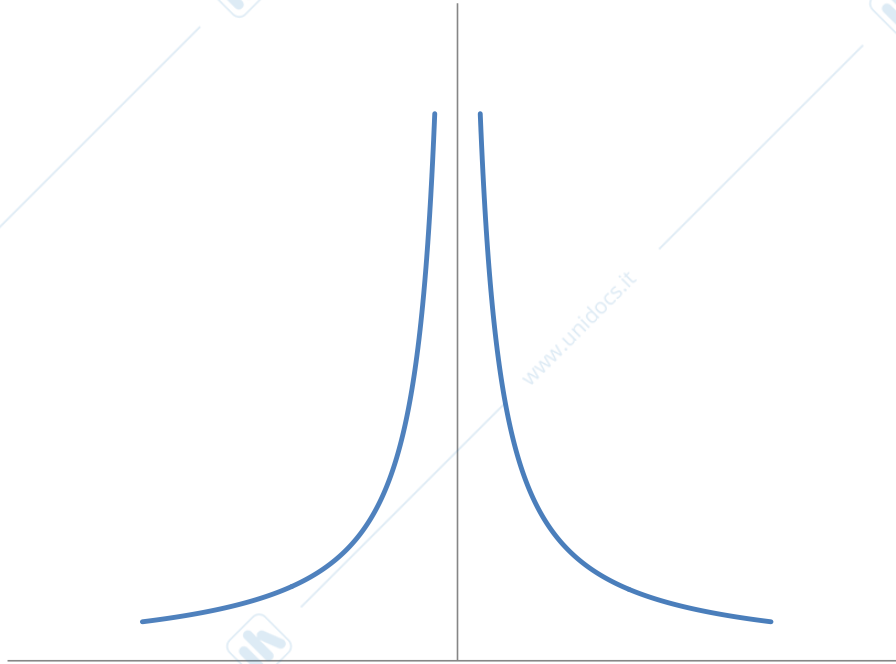


Esempio applicativo.

Sia:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{|x|},$$

Graficamente:



Si vuole calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$$

La funzione valore assoluto è definita come:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$$

Si suddivide il limite (“da destra” e “da sinistra”):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty \quad (\text{come già visto})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-1 \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

ESISTE il limite

ESERCIZIO.

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{1+x},$$

Indicare il dominio di definizione della funzione e calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione al numeratore, in questo caso \mathbf{R} , - i valori in cui si annulla il denominatore: $1+x=0$.

Si verifica quindi:

$$1+x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1$$

La disequazione trovata non è il dominio, ma rappresenta la condizione che determina il dominio.

La funzione è quindi definita da:

$$f: \mathbf{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$+\infty$ è un punto di accumulazione (la funzione è definita su $\mathbf{R} - \{-1\}$).

Si può lavorare sull'espressione della funzione, cercando di esprimerla in termini di funzioni più semplici di cui si conosca già il limite.

Si considera:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot (1+x)} = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{0+1} = 1 \quad \left(\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \right)$$

Il metodo seguito per semplificare la funzione non è univoco, un modo alternativo è:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{x}{x \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{0+1} = 1 \quad \left(\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \right)$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

In modo analogo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Dato il dominio di definizione della funzione, si possono calcolare i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+x}$$

Si ottiene:

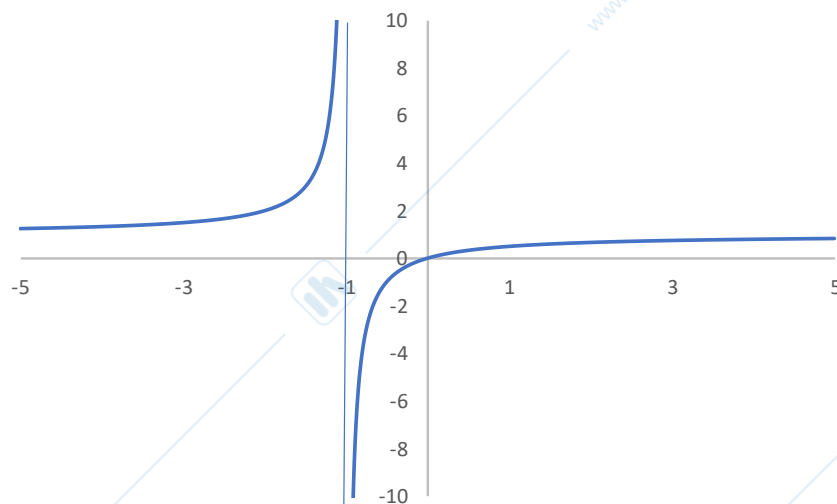
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1+x} = \frac{-1}{1-1^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x \rightarrow -1^-$, quindi per valori $x < -1$, per cui il denominatore tenderà a 0 da valori negativi, da cui il rapporto risulta $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+x} = \frac{-1}{1-1^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x \rightarrow -1^+$, quindi per valori $x > -1$, per cui il denominatore tenderà a 0 da valori positivi, da cui il rapporto risulta $-\infty$.

Graficamente:



FUNZIONE ESPONENZIALE.

Dato:

$$x \in \mathbf{R}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad a = \text{costante}$$

Si vuole definire la funzione:

$$f(x) = a^x$$

Se x è un numero reale, non può essere $a < 0$. Per esempio, per un numero negativo non può essere calcolata la radice quadrata:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Si pone:

$$a \in \mathbf{R}^+ \quad (\text{non si considera } a = 0, \text{ perché } 0^x = 0)$$

Si consideri in particolare:

$$x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = a^x, \quad a > 1$$

Valgono le proprietà:

$$\text{i) } a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\text{ii) } (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\text{iii) } x < y \quad \Rightarrow \quad a^x < a^y \quad (a > 1)$$

Le proprietà valgono se $x \in \mathbf{N}$:

$$a^x = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (a \text{ moltiplicato per sé stesso } x \text{ volte})$$

Se:

$$x \in \mathbf{I}$$

Valgono le proprietà precedenti. Inoltre:

$$a^x = \begin{cases} a^x & , x \in \mathbf{N} \\ 1 & , x = 0 \\ \frac{1}{a^{|x|}} & , x \in -\mathbf{N} \end{cases}$$

In generale:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

Se:

$$x \in \mathbf{Q} \quad \mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbf{I}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

Valgono le proprietà precedenti. Inoltre:

$$x = \frac{m}{n} \quad \rightarrow \quad a^x = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m$$

Dalla definizione di radice n-sima:

$$y = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad y^n = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a$$

Si pone per definizione:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt[n]{a} \right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Elevare un numero a $\frac{1}{n}$ equivale a calcolarne la radice n-sima.

Se:

$$x \in \mathbf{R}$$

Valgono tutte le proprietà precedenti.

Sia:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+, a > 1$$

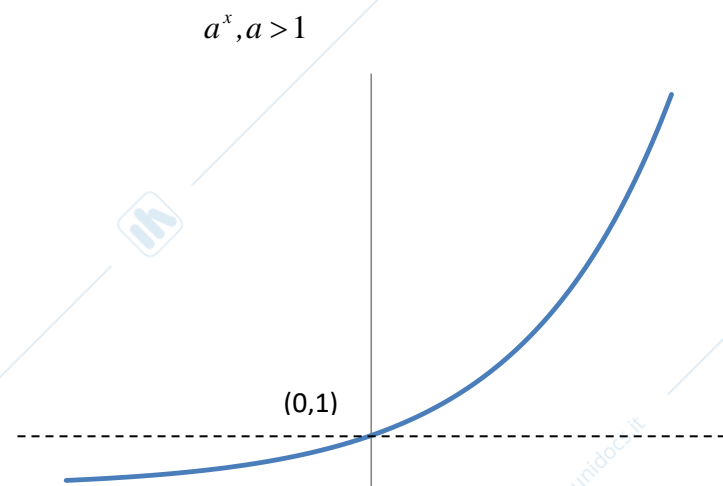
Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^{|x|}} = 0$$

Graficamente:



Sia:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+, a < 1$$

Vale il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^0 = 1$$

Per i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, si può considerare che:

$$a = \frac{1}{a^{-1}}$$

e:

$$a^x = \left(\frac{1}{a^{-1}} \right)^x = \frac{1}{(a^{-1})^x}$$

Se:

$$a < 1 \quad \Rightarrow \quad a^{-1} > 1 \quad (\text{se un numero è } < 1, \text{ il suo reciproco è } > 1)$$

Per $x \rightarrow +\infty$ si può osservare che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^{-1})^x = +\infty \quad (a^{-1} > 1)$$

Per cui, il limite per $x \rightarrow +\infty$ è:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(a^{-1})^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

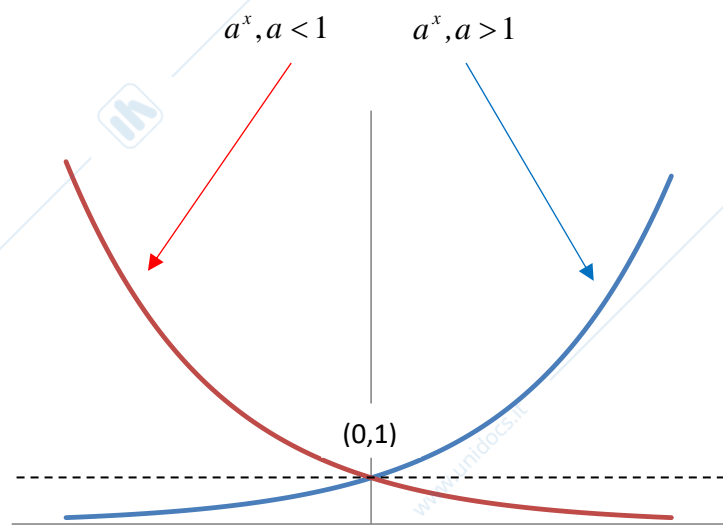
Per $x \rightarrow -\infty$ si può osservare che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a^{-1})^x = 0 \quad (a^{-1} > 1)$$

Per cui, il limite per $x \rightarrow -\infty$ è:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(a^{-1})^x} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Graficamente:



ESERCIZIO.

Sia:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{a^x}{a^x + 1}, \quad x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+$$

Si vuole calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x}{a^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{a^x + 1}$$

Occorre distinguere i due casi:

$$a > 1$$

$$a < 1$$

In entrambi i casi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x}{a^x + 1} = \frac{a^0}{a^0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

I caso: $a > 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x \left(1 + \frac{1}{a^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{a^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + a^{-x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{a^x + 1} = \frac{0}{0 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

II caso: $a < 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x + 1} = \frac{0}{0 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{a^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{a^x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

FUNZIONE LOGARITMO.

Dato:

$$x \in \mathbf{R}^+, \quad a \in \mathbf{R}^+, \quad a = \text{costante}$$

Si definisce la funzione logaritmo in base a di x:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad a \in \mathbf{R}^+$$

$$y = f(x) = \lg_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Cioè: y è l'esponente da dare alla base a per ottenere x.

La funzione esponenziale e la funzione logaritmo sono una la funzione inversa dell'altra. Perché valga questa affermazione, la funzione esponenziale dovrebbe essere definita più correttamente come:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, \quad f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+ \quad (\text{e non } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R})$$

Si dovrebbero considerare i due casi: $a > 1$ e $a < 1$.**Si considera solo il caso: $a > 1$.**

Dalla definizione di funzione logaritmo si ha:

$$\text{per } x = 1: \quad y = \lg_a 1 = 0 \quad (a^y = 1 \Leftrightarrow y = 0 \quad a^0 = 1)$$

$$\text{per } x \rightarrow +\infty: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_a x = +\infty \quad \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} a^y = +\infty \right)$$

$$\text{per } x \rightarrow 0^+: \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg_a x = -\infty \quad \left(\lim_{y \rightarrow -\infty} a^y = 0 \right)$$

Il limite per $x \rightarrow 0^+$ è dovuto al fatto che $x \in \mathbf{R}^+$ (la funzione logaritmo non è definita per valori negativi di x).