

ESERCIZIO.

Sia:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

La funzione è definita da (si tolgono da \mathbf{R} i valori che annullano il denominatore):

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Si vuole calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{0^+}{0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \frac{0^-}{0^-}$$

Il limite appare nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Ricordando una delle proprietà dei limiti:

$$A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(A), \quad f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$$

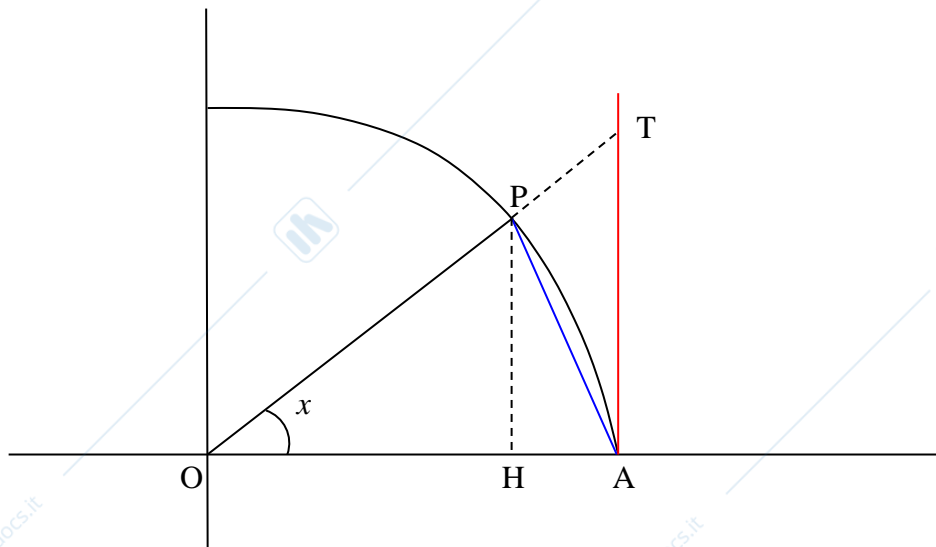
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

$$h : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in A, \quad \alpha = \beta \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \alpha = \beta$$

In questo caso, consideriamo:

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad A = \mathbf{R} - \{0\}$$

Se si individuano due funzioni \leq e \geq della funzione $h(x)$, che abbiano lo stesso limite, allora è possibile calcolare il limite della funzione $h(x)$.Si può considerare graficamente un arco \widehat{AP} sulla circonferenza unitaria:



Nella rappresentazione grafica possono essere individuati i triangoli:

$$O\hat{P}A$$

$$O\hat{T}A$$

ed il settore circolare:

$$O\hat{A}\hat{P} \quad \text{centrato in } O \text{ e delimitato dall'arco } \widehat{AP} \text{ di lunghezza } l(\widehat{AP}).$$

Considerando le aree di queste figure geometriche, si osserva:

$$Area(O\hat{P}A) \leq Area(O\hat{A}\hat{P}) \leq Area(O\hat{T}A) \quad (\text{l'uguaglianza vale solo nel caso } x = 0)$$

Esplicitando il calcolo delle aree, si ha:

$$\frac{1}{2} OA \cdot PH \leq \frac{1}{2} OA \cdot l(\widehat{AP}) \leq \frac{1}{2} OA \cdot TA$$

Cioè (semplificando $\frac{1}{2} OA$):

$$PH \leq l(\widehat{AP}) \leq TA$$

Dalla definizione di angolo in radianti:

$$x = l(\widehat{AP})$$

e dalla definizione delle funzioni circolari:

$$PH = \sin x$$

$$OH = \cos x$$

$$\frac{PH}{OH} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

I due triangoli:

$$O\hat{P}H \quad \text{e} \quad O\hat{T}A$$

sono triangoli simili, per cui, per le proprietà di similitudine dei triangoli:

$$\tan x = \frac{PH}{OH} = \frac{TA}{OA} = TA \quad (OA = 1, \text{ è il raggio della circonferenza unitaria})$$

Vale quindi:

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

Cioè:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \tan x \cdot \frac{1}{\sin x}$$

Dove:

$$\tan x \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

Sostituendo si ottiene:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Considerando il reciproco delle funzioni e invertendo conseguentemente il segno delle disuguaglianze:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

Per cui:

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si vogliono calcolare ora i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}$$

La funzione *seno* è una funzione limitata:

$$\sin x \in [-1,1] \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{o anche} \quad |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Il numeratore non potrà mai divergere per $x \rightarrow +\infty$, ma assumerà solo valori reali ≥ -1 e ≤ 1 , per cui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

ESERCIZI

Si calcolino i seguenti limiti, indicando anche il dominio di definizione delle funzioni.

1)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(3x+1)}{x}$$

2)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-3x^2+2}$$

3)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1}$$

4)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3-2x+1}$$

5)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3-2x+1}$$

6)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

7)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

8)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

9)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\cos x}$$

DERIVATE.

Sia:

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in A \cap D(A)$$

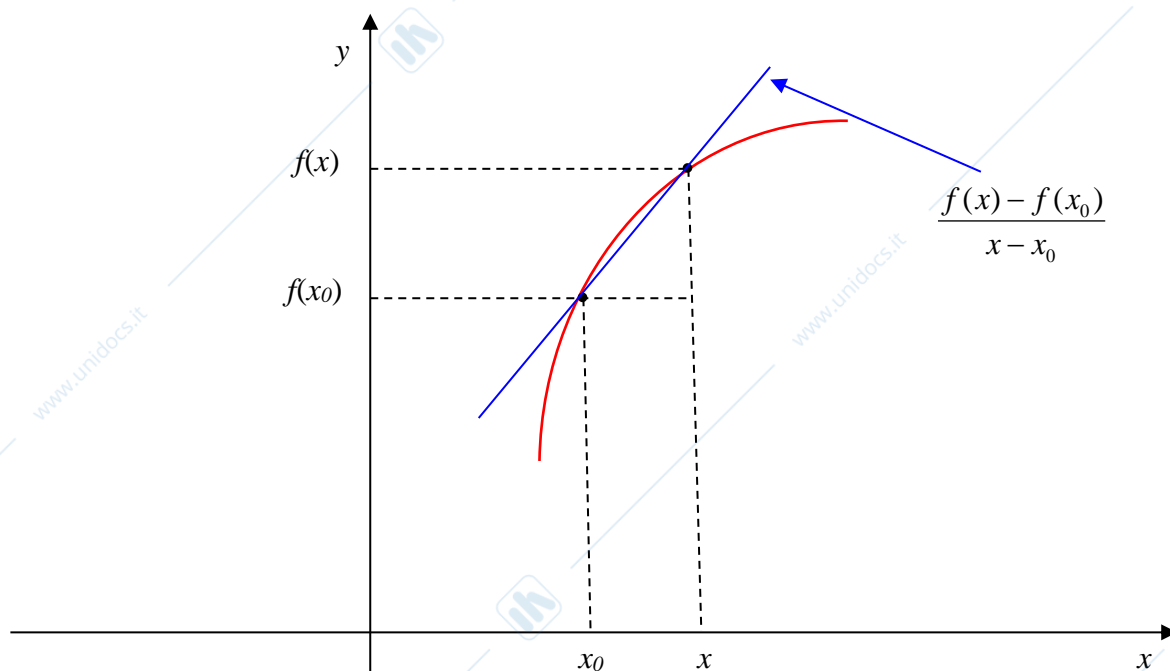
Si definisce la funzione:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in A - \{x_0\}$$

La funzione è definita in $A - \{x_0\}$ e viene chiamata rapporto incrementale di f a partire dal punto x_0 .

Si definisce:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il significato geometrico del limite del rapporto incrementale è quello di rappresentare la tangente alla funzione $f(x)$ nel punto x_0 :

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in A \cap D(A)$$

Si definisce derivata della funzione f nel punto x_0 , il limite, se esiste, del rapporto incrementale:

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \equiv f'(x_0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La derivata, così definita, è chiamata anche derivata prima.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in A \cap D(A);$$

$$\exists f'(x_0) \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad f \text{ è continua in } x_0.$$

L'esistenza della derivata implica la continuità solo se la derivata è finita.

Esempio.

Sia:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbf{R}$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Il limite del rapporto incrementale della funzione x^2 nel punto x_0 è $2x_0$.

Considerazioni sulla continuità e derivabilità di una funzione. Esempio.

Si è visto che se esiste la derivata finita di una funzione in un punto, la funzione è continua in quel punto:

$$\exists f'(x_0) \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad f \text{ è continua in } x_0.$$

Non è sempre vera l'implicazione opposta: la continuità di una funzione non sempre implica l'esistenza della derivata.

Sia:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = |x|,$$

La funzione valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$$

è continua nel punto 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |0| = 0$$

Ci si può chiedere se:

$$\exists f'(0) \quad ?$$

Il rapporto incrementale rispetto allo 0 è:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

Per l'esistenza della derivata nel punto 0 si deve verificare se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$$

Si considerano i due limiti da destra e da sinistra:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Non esiste la derivata prima nel punto 0 della funzione *valore assoluto di x* (pur essendo una funzione continua nel punto 0).

Considerazioni sull'espressione del rapporto incrementale e sulla derivata di una funzione.

Si consideri:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in A \cap D(A)$$

Come visto in precedenza, si definisce derivata della funzione f nel punto x_0 , il limite, se esiste, del rapporto incrementale:

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \equiv f'(x_0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La derivata, così definita, è chiamata anche derivata prima.

Se si definisce:

$$h = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + h$$

Il rapporto incrementale diventa:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se, anziché il punto x_0 , si considera un generico punto $x \in A \cap D(A)$, il rapporto incrementale può essere scritto come:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

e la definizione di derivata diventa:

$$\left(\frac{df}{dx} \right) \equiv f'(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Dove la variabile, nel calcolo del limite, è rappresentata dall'incremento h e la derivata è riferita alla funzione e non ad uno specifico punto x_0 .

La derivata non è più un numero, come visto prima, ma è a sua volta una funzione.

Proprietà delle derivate e tavola riassuntiva delle regole di derivazione.

Per le derivate valgono le seguenti proprietà.

Siano:

$$f, g : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}$$

$$\exists f'(x), g'(x) \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in A \quad (\text{le derivate prime di } f \text{ e } g \text{ sono finite})$$

Si ha allora:

i) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (derivata di una somma)

ii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (derivata di un prodotto)

iii) $g \neq 0, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ (derivata del reciproco)

iv) $g \neq 0, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Sia:

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow \mathbf{R}, \quad A, B \subseteq \mathbf{R}, \quad y = f(x)$$

$$\exists f'(x), g'(y) \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in A, y \in B$$

Si ha:

v) $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (derivata di funzione composta)

Sia:

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow A, \quad A, B \subseteq \mathbf{R}, \quad y = f(x), \quad x = g(y)$$

$$\exists f'(x), g'(y) \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in A, y \in B, \quad f' \neq 0$$

Si ha:

vi) $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ (derivata di funzione inversa)

Derivata della Funzione Esponenziale.

Si considera la funzione **esponenziale**:

$$f(x) = e^x, \quad f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è data da:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Dalle proprietà della funzione esponenziale:

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h$$

Per cui:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Dove e^x non è interessata dal limite, che viene calcolato per la variabile $h \rightarrow 0$ (e^x si comporta come una costante e quindi viene estratta dall'operazione di calcolo del limite).

Essendo (come visto in un esercizio precedente):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

La derivata di una funzione esponenziale è quindi:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Derivata della funzione logaritmo.

Si considera la funzione **logaritmo**:

$$f(x) = \log x, \quad f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è data da:

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

Dalle proprietà della funzione logaritmo:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

Si ha:

$$\log(x+h) - \log x = \log(x+h) + \log x^{-1} = \log[(x+h)x^{-1}] = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = z \cdot x$$

Per cui, quando:

$$h \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad z \rightarrow 0$$

Il limite diventa:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z \cdot x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1+z)}{z} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z}$$

Essendo:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = \frac{1}{x}$$

La derivata di una funzione logaritmo è:

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

Un altro modo per calcolare la derivata della funzione logaritmo è considerare la derivata della sua funzione inversa.

Sia:

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow A, \quad A, B \subseteq \mathbf{R}, \quad y = f(x), \quad x = g(y)$$

$$\exists f'(x), g'(y) \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in A, y \in B, \quad f' \neq 0, g' \neq 0$$

Le funzioni f e g sono una la funzione inversa dell'altra.

La derivata di g è data da:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (\text{derivata di funzione inversa})$$

La derivata di f è data da:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \quad (\text{derivata di funzione inversa})$$

Nel caso di una funzione logaritmo, la sua funzione inversa è la funzione esponenziale e , nel caso del *logaritmo naturale*, vale (la base è costituita dal numero di Nepero):

$$y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

La derivata è data da:

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad \left(\frac{d}{dy}(e^y) = e^y, \quad e^y = x \right)$$

Derivata della funzione potenza.

Sia:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^a, \quad a \in \mathbf{R}$$

Se si considerasse $x = 0$ e fosse $a = 0$, la funzione ricadrebbe nel caso 0^0 .

Si vuole calcolare la derivata:

$$\frac{d}{dx}(x^a)$$

Data una funzione:

$$g: \mathcal{C}(f) \rightarrow \mathbf{R}, \quad z = g(f(x))$$

La sua derivata è (derivata di funzione composta)

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Nel caso in cui si riesca ad individuare una funzione per cui la derivata:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x)))$$

possa essere calcolata indipendentemente dalla forma esplicita per una funzione composta, si otterrebbe:

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(g(f(x)))}{g'(f(x))}$$

Nel caso in esame, il codominio della funzione

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^a, \quad a \in \mathbf{R}$$

è:

$$\mathcal{C}(f) = \mathbf{R}^+$$

Si può considerare la funzione:

$$g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(y) = g(f(x)) = \log x^a, \quad a \in \mathbf{R}$$

Si ha:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \log(x^a) = \frac{1}{x^a} \cdot \frac{d}{dx}(x^a)$$

Si può osservare che:

$$\log x^a = a \cdot \log x$$

e:

$$\frac{d}{dx}(\log(x^a)) = \frac{d}{dx}(a \cdot \log x) = a \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{a}{x}$$

Quindi:

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{x^a} \cdot \frac{d}{dx}(x^a)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{a}{x} \cdot x^a = a \cdot x^{-1} \cdot x^a = a \cdot x^{a-1}$$

La derivata di una funzione di potenza è quindi:

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

ESERCIZI

Si indichi il dominio di definizione delle funzioni seguenti e se ne calcoli la derivata.

10) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x - 2$

11) $f(x) = e^{x^2+x}$

12) $f(x) = x \cdot \log x$

13) $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}$

14) $f(x) = \log(\log x)$

15) $f(x) = \frac{\log x - 1}{\log x + 1}$