

INTRODUZIONE E DEFINIZIONI

Assioma matematico

Con assioma si intende una verità evidente per sé stessa, che non ha bisogno di dimostrazione. Nella scelta di assiomi matematici per la costruzione di una teoria matematica vi sono soprattutto le esigenze di logica e di praticità che più interessano.

Una proposizione matematica può essere un'affermazione come:

P: "5 è un numero primo"

Q: "n è un numero naturale pari"

Simbolo di implicazione ed altri simboli

$P \Rightarrow Q$ (Significa: "P implica Q"; "Se P allora Q")

Esempio. Si abbiano le due proposizioni:

P: "n è un numero naturale multiplo di 6"

Q: "n è un numero naturale pari" (dove con pari si intende un numero multiplo di 2)

Quindi:

Se è vero P, allora vale Q, quindi $P \Rightarrow Q$ (un numero naturale multiplo di 6 è pari)

$A \Leftrightarrow B$ (Doppia implicazione: "A implica B e B implica A"; "se e solo se")

\exists ("esiste"; "esistono")

$\exists!$ ("esiste ed è unico")

Esempio:

\exists un numero naturale ecc.

\exists due numeri naturali ecc.

\forall ("qualunque sia"; "qualunque siano"; "per ogni")

:

TEORIA DEGLI INSIEMI

Si assume come primitiva l'idea di insieme (primitiva significa che non ci si può riportare ad una proposizione più semplice).

L'insieme è un raggruppamento di oggetti (definiti come elementi dell'insieme) che conservano, però, la loro individualità.

Siano:

A, B, \dots (insiemi)
 a, b, \dots (elementi dell'insieme)

Se a è un elemento dell'insieme A , si indica con:

$a \in A$ (si legge: “ a appartiene ad A ”)

Viceversa, se a non è un elemento dell'insieme A , si indica con:

$a \notin A$ (si legge: “ a non appartiene ad A ”)

Definizione di uguaglianza tra insiemi.

Siano:

A, B insiemi

Si ha:

$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Due insiemi A e B sono uguali, se e solo se, preso un elemento x appartenente ad A , x è anche appartenente a B e viceversa. Quindi due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi.

$A = \{a, b\}$ (all'interno delle parentesi graffe si mettono gli elementi dell'insieme)
 $B = \{b, a\}$

Dalla definizione di uguaglianza tra insiemi, cioè due insiemi sono uguali se e solo se:

$x \in A \Leftrightarrow x \in B$

si vede che i due insiemi contengono gli stessi elementi a e b , quindi:

$A = B$

Definizione di sottoinsieme.

Siano:

 A, B insiemiSi indica che A è sottoinsieme di B con:

$A \subseteq B$ che si legge: “ A è sottoinsieme di B ”; “ A è contenuto in B ”
 (in particolare, il simbolo \subseteq significa più esattamente “contenuto o uguale”)

La scrittura $A \subseteq B$ significa:

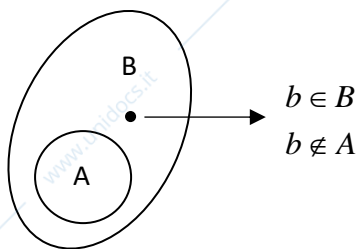
$x \in A \Rightarrow x \in B$ che si legge: “se un elemento x appartiene all’insieme A , allora appartiene anche all’insieme B ”
 (ciò non esclude che sia $A=B$)

Si indica invece che A è sottoinsieme proprio di B con:

$A \subset B$ che indica: “ A è sottoinsieme di B ed A è diverso da B ”

Quindi:

$A \subset B$ significa $\begin{cases} A \subseteq B \\ \exists b \in B : b \notin A \end{cases}$ che si legge: “esiste un elemento b appartenente all’insieme B tale che b non appartenga all’insieme A ”.

Un esempio di sottoinsieme proprio si ha nella figura, rappresentante i due insiemi A e B .

Esempi di sottoinsiemi:

$$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d\}$$

Per poter scrivere che:

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c\} \quad (\text{sottoinsieme proprio})$$

Occorre dimostrare che c non sia nel primo insieme. Si può fare per esempio:

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c\} \quad \text{se } c \neq a \text{ e } c \neq b$$

Insieme dei numeri naturali.

L'insieme dei numeri naturali è l'insieme di 1, 2, 3,

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Se si indica con M l'insieme dei numeri naturali pari:

$$M = \{2, 4, 6, \dots\}$$

l'insieme M si indica nel seguente modo:

$$M = \{n \in N; n \text{ pari}\} \quad \text{che si legge: "M è uguale all'insieme degli elementi } n \text{ appartenenti all'insieme } N \text{ che godono della proprietà di essere pari".}$$

In generale, se si ha un insieme A e su di A una proprietà $P(x)$ di alcuni suoi elementi, si indicano gli elementi che godono di $P(x)$ come:

$$B = \{x \in A; P(x)\} \quad B \text{ è l'insieme degli elementi } x \text{ appartenenti ad } A \text{ che godono della proprietà } P(x).$$

Insieme vuoto.

L'insieme vuoto è un insieme che non ha elementi e si può quindi considerare sottoinsieme di qualunque insieme.

L'insieme vuoto si indica con il simbolo: ϕ

Si può definire l'insieme vuoto come:

$$\phi = \{n \in N; n \neq n\} \quad \phi \text{ è l'insieme degli elementi } n \text{ appartenenti all'insieme } N \text{ che godono della proprietà } n \neq n \text{ (di essere diversi da sé stessi).}$$

ϕ è un insieme privo di elementi (nessun elemento gode della proprietà $n \neq n$), quindi è l'insieme vuoto.

Unione ed intersezione di insiemi.

Siano:

$$A, B, \dots \subseteq X \quad (A, B, \dots \text{ sottoinsiemi di } X)$$

Si definisce unione dell'insieme A con l'insieme B (si indica con la scrittura $A \cup B$):

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \text{ opp. } x \in B\}$$

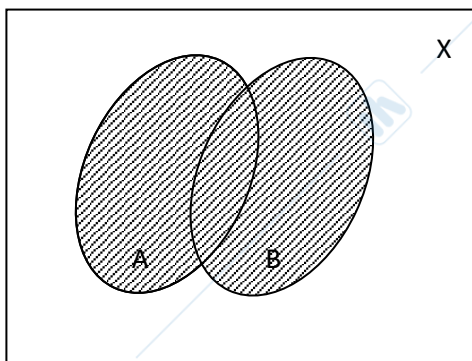
$A \cup B$ è l'insieme degli elementi x appartenenti all'insieme X che godono della proprietà di appartenere all'insieme A o all'insieme B , oppure di appartenere ad entrambi.

Si definisce intersezione dell'insieme A con l'insieme B (si indica con la scrittura $A \cap B$):

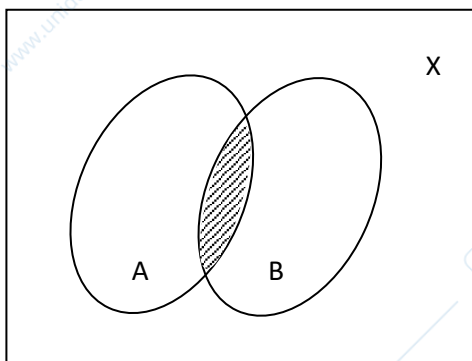
$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$A \cap B$ è l'insieme degli elementi x appartenenti all'insieme X che godono della proprietà di appartenere all'insieme A e all'insieme B .

Un esempio grafico dell'unione e dell'intersezione di insiemi è dato nelle figure:



Rappresenta l'unione dell'insieme A con l'insieme B: $A \cup B$.



Rappresenta l'intersezione dell'insieme A con l'insieme B: $A \cap B$.

Complementare di un insieme.

Sia:

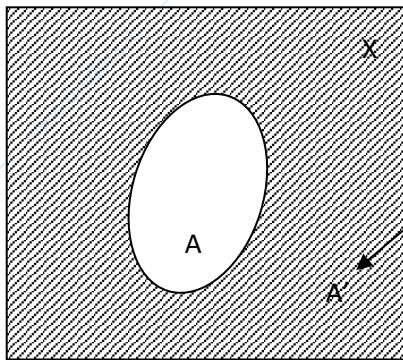
$$A \subseteq X$$

Si definisce complementare dell'insieme A , l'insieme:

$$A' = \{x \in X; x \notin A\}$$

A' è l'insieme degli elementi x appartenenti all'insieme X che godono della proprietà di non appartenere all'insieme A .

Un esempio grafico del complementare di un insieme è il seguente:

Rappresenta il complementare dell'insieme A **Alcune proprietà dell'unione e dell'intersezione.****Proprietà di idempotenza.**

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

L'unione dell'insieme A con sé stesso è uguale all'insieme A stesso (analogamente per l'intersezione dell'insieme A con sé stesso).

Proprietà associativa.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

L'unione dell'insieme A con l'unione dell'insieme B con l'insieme C è uguale all'unione dell'unione dell'insieme A con l'insieme B con l'insieme C .

(analogamente per l'intersezione dell'insieme A con l'intersezione dell'insieme B con l'insieme C).

Proprietà distributiva.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

L'unione dell'insieme A con l'intersezione dell'insieme B con l'insieme C è uguale all'intersezione dell'unione dell'insieme A con l'insieme B con l'unione dell'insieme A con l'insieme C .
(analogamente per l'intersezione dell'insieme A con l'unione dell'insieme B con l'insieme C).

Prodotto cartesiano.

Siano:

A, B insiemi
 (a, b) coppia ordinata

Dove:

a = prima componente o prima coordinata
 b = seconda componente o seconda coordinata

Due coppie ordinate sono uguali se:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

se e solo se: la 1° coordinata della prima coppia è uguale alla 1° coordinata della seconda coppia e la 2° coordinata della prima coppia è uguale alla 2° coordinata della seconda coppia.

Esempio:

$(1,2) \neq (2,1)$ le due coppie $(1,2)$ e $(2,1)$ non sono uguali

Si definisce prodotto cartesiano di A per B (e si indica con $A \times B$) l'insieme:

$$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$$

l'insieme delle coppie ordinate (a, b) che godono della proprietà di essere a appartenente all'insieme A e b appartenente all'insieme B .

Esempio:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2\}$$

Il prodotto cartesiano di A per B è:

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$$

Il prodotto cartesiano di B per A è:

$$B \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

Il prodotto cartesiano non è commutativo:

$$A \times B \neq B \times A$$

NOZIONE DI RELAZIONE.

Siano A un insieme composto da un certo numero di individui e (a,b) una coppia ordinata. Si definisce la relazione di parentela (per esempio) come:

$$P = \{(a,b) \in A \times A; a \text{ è parente di } b\}$$

La relazione di parentela è uguale all'insieme delle coppie ordinate (a,b) , appartenenti al prodotto cartesiano dell'insieme A per sé stesso ($A \times A$), che godono della proprietà "a parente di b".

Dalla definizione di relazione si ha che:

$$P \subseteq A \times A \quad \text{la relazione di parentela è sottoinsieme di } A \times A$$

oppure:

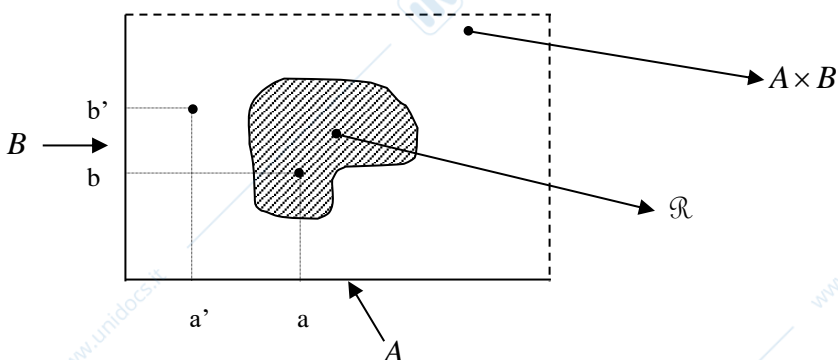
$$P \subset A \times A \quad \text{la relazione di parentela è sottoinsieme proprio di } A \times A.$$

Da quanto detto, siano:

A, B insiemi

\mathcal{R} è una relazione da A a B se vale:

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B \quad (\text{cioè se } \mathcal{R} \text{ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano } A \times B)$$



Dalla figura si può vedere che:

la coppia (a,b) è nella relazione \mathcal{R} .

la coppia (a',b') non è nella relazione \mathcal{R} .

Il fatto che la coppia (a,b) sia nella relazione \mathcal{R} si indica con:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \quad \text{la coppia } (a,b) \text{ appartiene alla relazione } \mathcal{R}$$

$$a \mathcal{R} b \quad \text{"a è nella relazione } \mathcal{R} \text{ con b", opp. "b corrisponde ad a attraverso } \mathcal{R}$$

Mentre il fatto che la coppia (a',b') non sia nella relazione \mathcal{R} si indica con:

$$(a',b') \notin \mathcal{R} \quad \text{la coppia } (a',b') \text{ non appartiene alla relazione } \mathcal{R}$$

$$a' \not\mathcal{R} b' \quad \text{"a' non è nella relazione } \mathcal{R} \text{ con b' ", opp.}$$

$$\text{"b' non corrisponde ad a' attraverso } \mathcal{R}$$

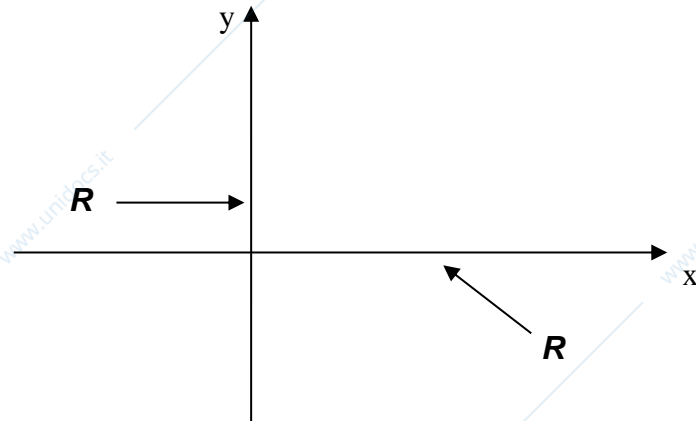
Sia:

\mathbf{R} l'insieme dei numeri reali

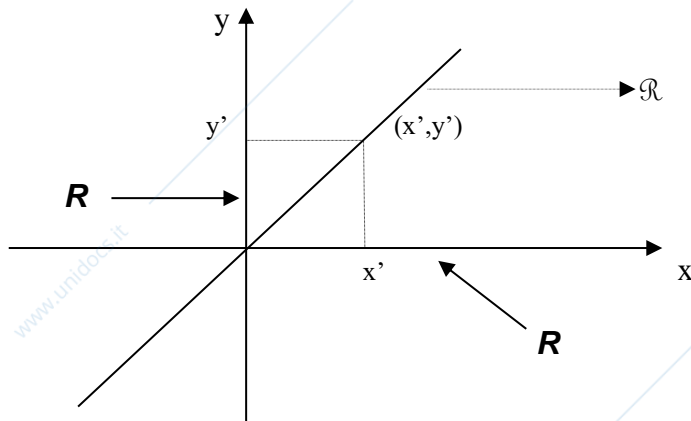
Si definisce:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 \quad (\text{si indica il prodotto cartesiano di } \mathbf{R} \text{ con sé stesso come } \mathbf{R}^2)$$

Associando \mathbf{R} a ciascuno dei due assi ortogonali x, y , si ottiene un sistema di assi cartesiani:



Se si considera la bisettrice dei due assi ortogonali, si ottiene il grafico:



Si definisce con \mathcal{R} la bisettrice dei due assi ortogonali. \mathcal{R} è una relazione se:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y$$

cioè x è nella relazione \mathcal{R} con y se e solo se x è uguale a y (in quanto \mathcal{R} rappresenta la bisettrice).

Si definisce la relazione \mathcal{R} come:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x = y\}$$

la relazione \mathcal{R} è uguale all'insieme delle coppie ordinate (x, y) , appartenenti ad \mathbf{R}^2 , che godono della proprietà di essere $x = y$.

Proprietà delle relazioni.

Per le relazioni sussistono alcune proprietà, non valide per tutte le relazioni.
Si hanno così alcune categorie di relazioni (a seconda delle proprietà):

- 1) Relazioni riflessive.
- 2) Relazioni simmetriche.
- 3) Relazioni transitive.

Dato:

A insieme

$\mathcal{R} \subseteq A \times A$

\mathcal{R} relazione da A ad A (\mathcal{R} è sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$)

Si ha:

1) Relazione riflessiva

Si ha che:

\mathcal{R} è riflessiva $\Leftrightarrow (a, a) \in \mathcal{R}, \forall a \in A$ Cioè la relazione \mathcal{R} è riflessiva se e solo se la coppia (a, a) appartiene alla relazione \mathcal{R} per ogni elemento a appartenente all'insieme A .

La condizione può essere scritta anche in un altro modo.

Se vale:

$a \mathcal{R} a, \forall a \in A \Rightarrow \mathcal{R}$ è riflessiva.

Vale a dire che se è verificato il fatto che a è nella relazione \mathcal{R} con a (cioè con sé stesso), per ogni a appartenente all'insieme A , allora la relazione \mathcal{R} è riflessiva.

2) Relazione simmetrica.

Il fatto che una relazione sia simmetrica significa che:

$a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$ (se vale questo: \mathcal{R} è simmetrica)

Si legge: "Se a è nella relazione \mathcal{R} con b , allora b è nella relazione \mathcal{R} con a ". Se vale questo, allora la relazione \mathcal{R} è simmetrica.

3) Relazione transitiva.

Il fatto che una relazione sia transitiva significa che:

$a \mathcal{R} b, b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$ (se vale questo: \mathcal{R} è transitiva)

Si legge: "Se a è nella relazione \mathcal{R} con b e b è nella relazione \mathcal{R} con c , allora a è nella relazione \mathcal{R} con c ". Se vale questo, allora la relazione \mathcal{R} è transitiva.

Siano:

A insieme, \mathcal{R} relazione da A ad A

Si definiscono:

Relazione d'ordine parziale.

\mathcal{R} è relazione d'ordine parziale $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ è riflessiva e transitiva

Relazione d'ordine totale.

\mathcal{R} è d'ordine totale $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ è d'ordine parziale, $\forall a, b \in A$ risulta: $a \mathcal{R} b$ oppure $b \mathcal{R} a$.

Relazione di equivalenza.

Si dice che:

\mathcal{R} è relazione di equivalenza $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ è riflessiva, simmetrica, transitiva.

Un esempio di equivalenza è dato da rette parallele nel piano (relazione di parallelismo nel piano):

- Una retta è sempre parallela a sé stessa (relazione riflessiva).
- Se una retta è parallela a un'altra retta, quest'altra retta è parallela alla prima (relazione simmetrica).
- Se una prima retta è parallela ad una seconda retta e questa seconda è parallela ad una terza retta, allora la prima è parallela alla terza (relazione transitiva)

Un altro esempio di equivalenza è la similitudine di triangoli.

La relazione di \geq sui numeri reali è riflessiva e transitiva:

- Ogni numero è uguale a sé stesso.
- Se $a \geq b$ e $b \geq c$, allora $a \geq c$.

La relazione di $>$ sui numeri reali non è riflessiva ma è solo transitiva:

- Nessun numero è maggiore di sé stesso.
- Se $a > b$ e $b > c$, allora $a > c$.

La relazione di \geq sui numeri reali è una relazione d'ordine totale:

- Ogni numero è uguale a sé stesso (relazione riflessiva).
- Se $a \geq b$ e $b \geq c$, allora $a \geq c$ (relazione transitiva).
- $\forall a, b \in \mathbf{R}$ risulta: $a \geq b$ oppure $b \geq a$.

FUNZIONI

Siano:

A, B insiemi

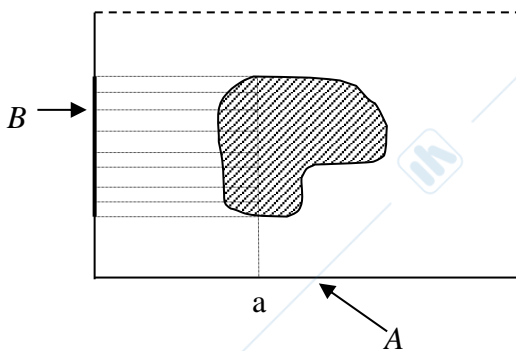
Si definisce:

f funzione da A in $B \Leftrightarrow f$ è una relazione da A a B : $\forall a \in A \exists ! b \in B : (a, b) \in f$

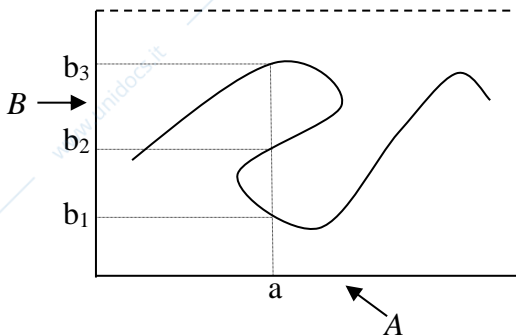
Si dice che f è una funzione da A in B se e solo se f è una relazione da A a B tale che, per ogni elemento a appartenente all'insieme A , esiste ed è unico un elemento b appartenente all'insieme B tale che la coppia (a, b) appartenga ad f .

Una funzione è quindi una relazione che, ad un elemento del 1° insieme, fa corrispondere uno, e uno solo, elemento del 2° insieme.

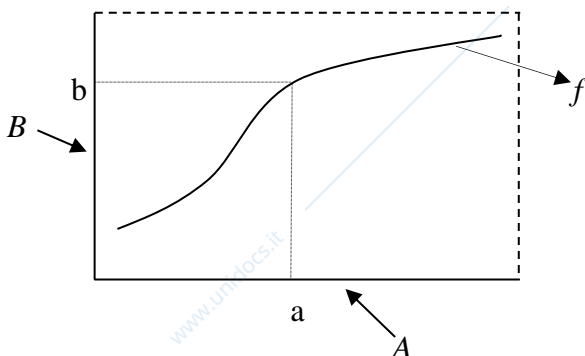
Esempi grafici



Non è una funzione:
ad un elemento dell'insieme A corrispondono più elementi dell'insieme B .



Non è una funzione



È una funzione

Quindi, siano:

A, B insiemi f

Le condizioni perché f sia una funzione sono:

- i) $f \subseteq A \times B$
- ii) $\forall a \in A, \exists! b \in B : (a, b) \in f$

cioè che f sia una relazione e che, per ogni elemento a appartenente ad A , esista e sia unico un elemento b appartenente a B tale che la coppia (a, b) appartenga alla relazione f .

Per indicare la funzione f da A in B , si usa la scrittura:

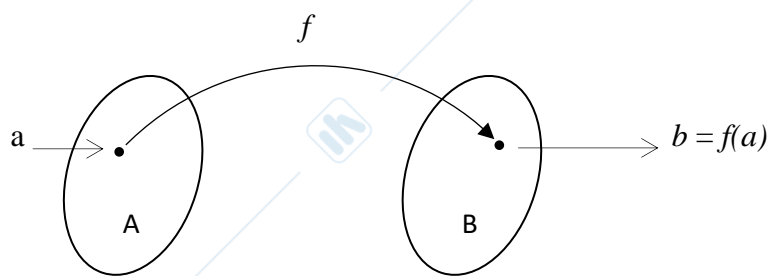
$$f : A \rightarrow B$$

$$(a, b) \in f \equiv b = f(a)$$

La scrittura $(a, b) \in f$ coincide con la scrittura $b = f(a)$.

Dove la scrittura $b = f(a)$ significa che b è l'immagine attraverso f di a .

Un'esemplificazione grafica di funzione è la seguente:



$$f : A \rightarrow B$$

dove A è il dominio di f .

B è l'insieme a cui appartengono i valori di f .

Codominio.

Si definisce codominio:

$$\mathcal{C}(f) = \{b \in B; \exists a \in A : b = f(a)\}$$

Il codominio è l'insieme degli elementi b appartenenti a B , che godono della proprietà che esiste un elemento a appartenente ad A tale che b sia l'immagine attraverso f di a (espressa da $b = f(a)$).

Il codominio, quindi, è la totalità degli elementi di B che hanno un punto in A tramite la funzione f .

Suriettività, iniettività e biiezione (o biezione) di una funzione.Suriettività.

Si dice che:

$$f \text{ è suriettiva} \Leftrightarrow \mathcal{C}(f) = B$$

f è suriettiva se e solo se il codominio di f coincide con B .

Iniettività.

Si dice che:

$$f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow (f(a') = f(a'') \Rightarrow a' = a'')$$

f è iniettiva se e solo se: se si ha che l'immagine attraverso f di a' è uguale all'immagine attraverso f di a'' , allora a' è uguale ad a'' . Si può dire che una funzione è iniettiva se porta punti distinti in punti distinti.

Biiezione.

Si dice che:

$$f \text{ è una biiezione} \Leftrightarrow f \text{ è suriettiva e iniettiva.}$$

La suriettività, l'iniettività e la biiezione si indicano con:

- 1) $f : A \xrightarrow{su} B$ la funzione da A in B è suriettiva.
- 2) $f : A \xrightarrow{1-1} B$ la funzione da A in B è iniettiva.
- 3) $f : A \xrightarrow[su]{1-1} B$ la funzione da A in B è una biiezione.

Esempio.

Sia:

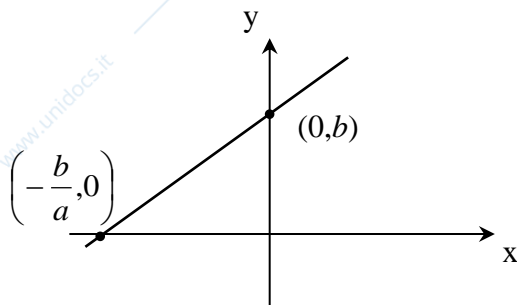
$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y = ax + b$$

$$f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y = ax + b\} \quad \text{dove } a, b \in \mathbf{R}$$

Si vuole vedere se f è una funzione, cioè si tratta di verificare se:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists! y \in \mathbf{R} : (x, y) \in f$$

Il che è vero, come si vede anche dal grafico:



Si ottiene una retta, le cui coordinate quando intercetta gli assi si ottengono ponendo x e y uguali a 0 nelle relazioni:

$$y = ax + b$$

$$x = \frac{y - b}{a}$$

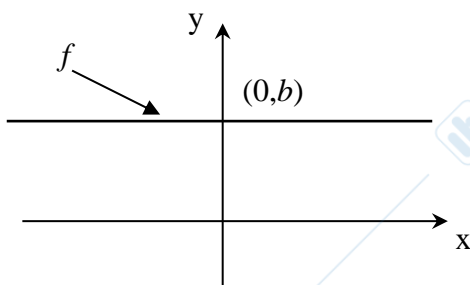
Uguagliando a 0 si ottiene per le due formule:

$$x = 0, \quad y = b$$

$$y = 0, \quad x = -\frac{b}{a}, \quad \text{con } a \neq 0$$

Il grafico precedente è stato ottenuto con $a \neq 0$.

Con $a = 0$, il grafico sarebbe:



Si cerca il codominio della funzione. Per definizione, è:

$$\mathcal{C}(f) = \{y \in \mathbf{R}; \exists x \in \mathbf{R} : y = ax + b\} = \mathbf{R} \quad (\text{nel caso in cui } a \neq 0)$$

$$\mathcal{C}(f) = \{y \in \mathbf{R}; y = b\} = \{b\} \quad (\text{nel caso in cui } a = 0)$$

1°) Si guarda se la funzione è **suriettiva**.

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Dalla definizione di suriettività, f è suriettiva se il suo codominio coincide con \mathbf{R} .

Si hanno due casi:

$$a \neq 0$$

$$a = 0$$

I caso ($a \neq 0$):

$$\mathcal{C}(f) = \mathbf{R} \quad (\text{come visto prima, quindi, con } a \neq 0, f \text{ è } su)$$

II caso ($a = 0$):

$$\mathcal{C}(f) = \{b\} \neq \mathbf{R} \quad (\text{con } a = 0, f \text{ non è } su)$$

2°) Si guarda se la funzione è **iniettiva**.

Dalla definizione di iniettività, f è $1-1$ se:

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$$

I caso ($a \neq 0$):

$$ax' + b = ax'' + b \Rightarrow x' = x'' \quad (\text{quindi, con } a \neq 0, f \text{ è } 1-1)$$

II caso ($a = 0$):

Si vede chiaramente che in questo caso f non è $1-1$. Infatti, l'immagine attraverso f di tutti gli x (x' , x'' , x''' ,ecc.) è sempre la stessa, anche se gli x non sono uguali.

3°) Si guarda se la funzione è una **biiezione**.

Nel caso in cui $a \neq 0$, f è su e $1-1$, per cui f è una biiezione.

Nel caso in cui $a = 0$, f non è né su né $1-1$, per cui f non è una biiezione.

Esempio.

Sia:

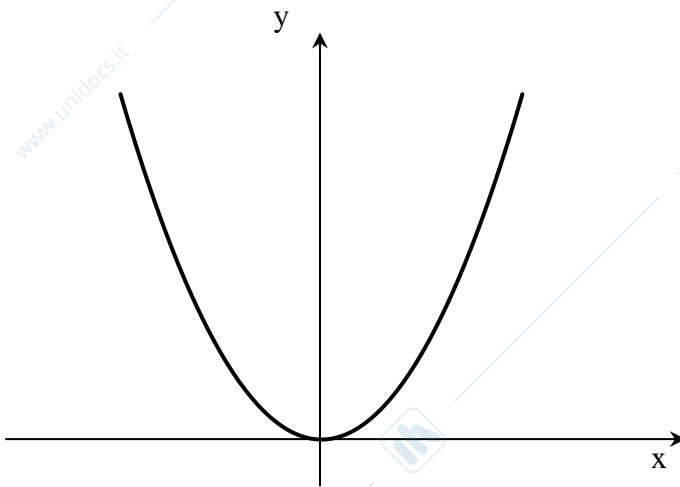
$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y = x^2$$

$$f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y = x^2\}$$

Si vuole vedere se f è una funzione, cioè se:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists! y \in \mathbf{R} : (x, y) \in f, y = x^2$$

Il che è vero, come si vede anche dal grafico:

1°) Si guarda se la funzione è **suriettiva**.

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Dalla definizione di suriettività, f è suriettiva se il suo codominio coincide con \mathbf{R} .

$$\mathcal{C}(f) = \{y \in \mathbf{R}; \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2\}$$

Vale:

$$y = x^2 = (-x)^2 \geq 0$$

Per cui:

$$\mathcal{C}(f) = \{y \in \mathbf{R}; y \geq 0\} = [0, +\infty[$$

la funzione **non è suriettiva**

Il simbolo “ [“ a sinistra significa “*chiuso*”, (l’insieme contiene lo 0), mentre il simbolo “ [“ a destra significa “*aperto*” (l’insieme dei numeri reali **non contiene** $+\infty$).

In generale:

“ [“ *chiuso a sinistra*, “] “ *chiuso a destra*.“] “ *aperto a sinistra*, “ [“ *aperto a destra*

2°) Si guarda se la funzione è **iniettiva**.

Dalla definizione di iniettività, f è 1-1 se:

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$$

Ponendo:

$$x' = x \quad , \quad x'' = -x$$

Si ha:

$$f(x') = x^2 \quad , \quad f(x'') = (-x)^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x' \neq x''$$

La funzione **non è iniettiva**.

FUNZIONE COMPOSTA

Siano:

 A, B, C insiemi

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

Si definisce funzione composta h , e si indica con la scrittura:

$$h = g \circ f$$

$$h = \{(a, c) \in A \times C; \exists b \in B : b = f(a); c = g(b)\}$$

La funzione composta h è uguale all'insieme delle coppie ordinate (a, c) , appartenenti al prodotto cartesiano $A \times C$, che godono della proprietà che esiste un elemento b appartenente a B tale che b sia l'immagine attraverso f di a e che c sia l'immagine attraverso g di b .

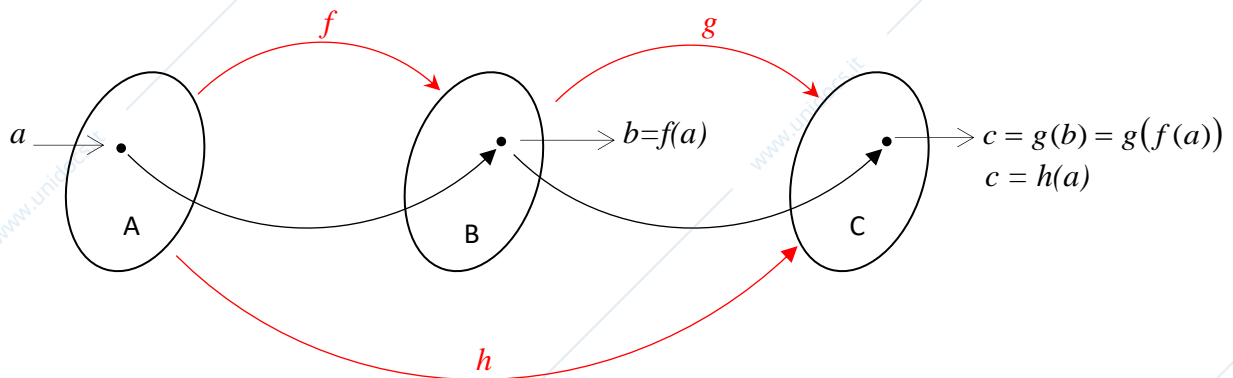
La scrittura:

$h = g \circ f$ si legge: “ f composta con g ” (cioè si scrive a destra la funzione che viene applicata per prima).

 c è l'immagine attraverso h (funzione composta) di a :

$$c = h(a) \Leftrightarrow c = g(f(a)) = (g \circ f)a \quad \text{si legge: “} f \text{ composta con } g \text{ applicata al punto } a\text{”}$$

Un'esemplificazione grafica di funzione composta è la seguente:



Quindi, riassumendo, siano:

 A, B, C insiemi

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

Si definisce funzione composta:

$$h = g \circ f \quad h : A \rightarrow C, \quad h(a) = g(f(a)), \quad \forall a \in A$$

Esempio di funzione composta

Siano:

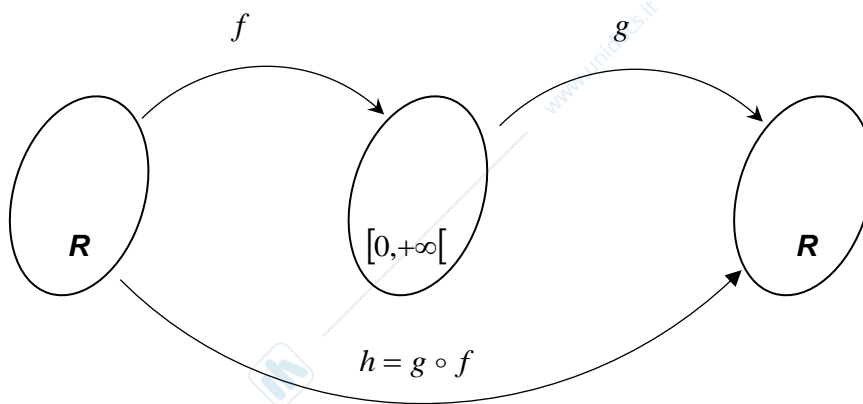
$$f: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2 \quad \text{(la funzione } f \text{ è su)}$$

$$g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} \quad , \quad g(y) = \sqrt{y}$$

La funzione composta

$$h = g \circ f$$

Può essere schematizzata graficamente come:



La funzione composta è:

$$h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$h(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2}$$

FUNZIONE INVERSA

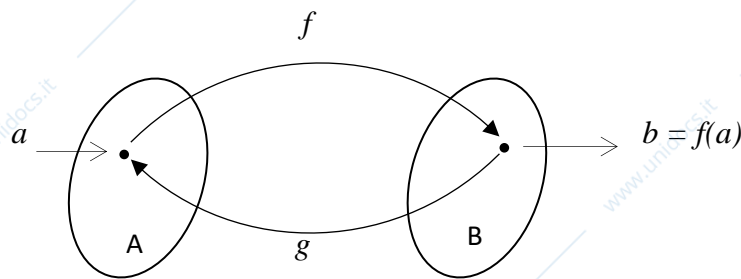
Siano:

A, B insiemi
 $f : A \rightarrow B$

Si definisce funzione inversa la funzione:

$$g : B \rightarrow A$$

Graficamente:

Se esiste una funzione inversa g , allora f è invertibile.

Questo significa che:

A, B insiemi

$$f : A \rightarrow B \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, a = g(b)$$

di modo che:

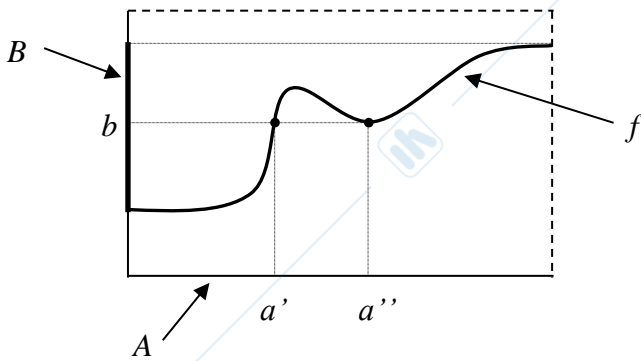
$$\begin{aligned} g(f(a)) &= a, \forall a \in A \\ f(g(b)) &= b, \forall b \in B \end{aligned} \quad (\text{deve valere anche il reciproco})$$

L'immagine attraverso g di $f(a)$ è uguale ad a , mentre l'immagine attraverso f di $g(b)$ è uguale a b , per ogni a e b .

La funzione inversa di una funzione f si indica con la scrittura:

$$g = f^{-1} \quad (f \text{ è una funzione, da } \underline{\text{non confondere}} \text{ con una variabile } x)$$

Se si ha per esempio la funzione il cui grafico è:



In questo caso la funzione f non è invertibile.

Una funzione, per essere invertibile, deve essere $1-1$ e su (senza dimostrazione).

Esempio di funzioni inverse

Il quadrato e la radice quadrata sono funzioni inverse (una è la funzione inversa dell'altra).

Verificano infatti:

$$x^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y} = x$$

Cioè il quadrato di x è uguale a y se e solo se la radice quadrata di y è uguale ad x .
Questo però vale solo con:

$$x \geq 0$$

In questo senso, l'esempio precedente di funzione composta:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2$$

non può essere utilizzato come esempio di funzione inversa, ma deve essere:

$$f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2$$

Alcune considerazioni sul dominio di una funzione.

Se si considera una funzione di variabile reale, non sempre può essere indicata con:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Non necessariamente il suo dominio coincide con \mathbf{R} .

Il dominio di una funzione rappresenta l'insieme dei punti per cui la funzione in esame può essere definita, e non è detto che questo insieme coincida con \mathbf{R} .

Esempio:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Può essere definita solo per $x \geq 0$ (la radice quadrata non può essere calcolata per numeri reali negativi), per cui:

$$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$$

Il dominio è $[0, +\infty[$.

Esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Può essere definita per tutti i valori reali tranne $x = 0$, perchè il rapporto $\frac{1}{0}$ darebbe un risultato tendente a $+\infty$ ($+\infty$ e $-\infty$ non appartengono all'insieme dei numeri reali \mathbf{R}).

La funzione può essere definita per:

$$f: \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il dominio è $\mathbf{R} - \{0\}$.

INSIEME DEI NUMERI REALI.

Si definisce una **struttura algebrica** come formata da un insieme e un certo numero di operazioni e relazioni definite su quell'insieme.

L'**insieme dei numeri reali** \mathbf{R} costituisce una struttura algebrica e si definisce mediante un certo numero di proprietà, suddivise in quattro gruppi.

Il primo gruppo di proprietà si ottiene definendo in \mathbf{R} un'operazione di addizione e gode delle seguenti proprietà:

$$(\mathbf{R}, +) \left\{ \begin{array}{ll} a + b = b + a & , \forall a, b \in \mathbf{R} \\ a + (b + c) = (a + b) + c & , \forall a, b, c \in \mathbf{R} \\ \exists! 0 \in \mathbf{R} : a + 0 = a & , \forall a \in \mathbf{R} \\ \forall a \in \mathbf{R}, \quad \exists(-a) \in \mathbf{R} : & a + (-a) = 0 \end{array} \right.$$

Il secondo gruppo di proprietà si ottiene definendo in \mathbf{R} l'operazione di moltiplicazione:

$$(\mathbf{R}, \cdot) \left\{ \begin{array}{ll} a \cdot b = b \cdot a & , \forall a, b \in \mathbf{R} \\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & , \forall a, b, c \in \mathbf{R} \\ \exists! 1 \in \mathbf{R}, 1 \neq 0 : a \cdot 1 = a & , \forall a \in \mathbf{R} \\ \forall a \in \mathbf{R} - \{0\} \quad \exists a^{-1} \in \mathbf{R} : & a \cdot a^{-1} = 1 \\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c & , \forall a, b, c \in \mathbf{R} \end{array} \right.$$

Il terzo gruppo di proprietà si ottiene definendo in \mathbf{R} una relazione di ordine totale \leq (significa che è una relazione riflessiva, transitiva e, comunque si prendano due elementi a e b , risulta $a \leq b$ oppure $b \leq a$).

$$(\mathbf{R}; \leq) \left\{ \begin{array}{ll} a \leq b & , c \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c \\ a \leq b & , c \in \mathbf{R}, c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c \end{array} \right.$$

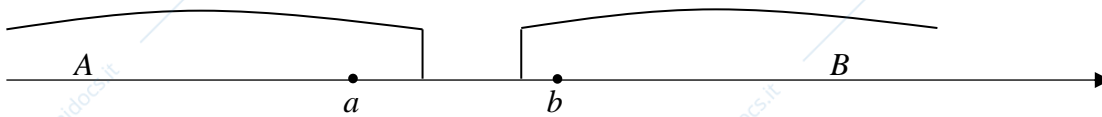
Il quarto gruppo di proprietà è formato dalla proprietà di completezza di \mathbf{R} rispetto alla relazione \leq .

Per definire la proprietà di completezza, occorre prima dare una definizione di classi contigue.

Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$, si dice che:

$$\begin{aligned} A, B \subseteq \mathbf{R} \quad \text{sono classi contigue (si indicano con c.c.)} & \Leftrightarrow \\ a \in A, b \in B \quad \Rightarrow \quad a \leq b & \end{aligned}$$

Graficamente, due insiemi che godono di questa proprietà sono:



Siano per esempio:

$$A =]-\infty, 0[= \{x \in \mathbf{R}; x < 0\}$$

$$B =]0, +\infty[= \{x \in \mathbf{R}; x > 0\}$$

Allora:

$$a \in A \Leftrightarrow a < 0$$

$$b \in B \Leftrightarrow b > 0$$

Si ha dunque:

$$a < 0, 0 < b \Rightarrow a < b$$

Due sottoinsiemi di \mathbf{R} che godono di questa proprietà, vengono chiamati classi contigue (c.c.):

$$A, B \subseteq \mathbf{R} \quad , a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b \quad (A, B \text{ sono c.c.})$$

Si definisce la proprietà di completezza di (\mathbf{R}, \leq) :

$$\begin{aligned} A, B \text{ sono c.c.} \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}: \quad a \leq \lambda, \lambda \leq b \quad , \forall a \in A, \forall b \in B \end{aligned}$$

Se A e B sono classi contigue, esiste un λ appartenente ad \mathbf{R} tale che $a \leq \lambda$ e $\lambda \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.

λ si chiama elemento di separazione, nell'esempio considerato è $\lambda = 0$.

Questa proprietà viene chiamata proprietà di completezza di \mathbf{R} rispetto alla relazione \leq .

INSIEMI DEI NUMERI NATURALI, INTERI, RAZIONALI E IRRAZIONALI.**Insieme dei numeri naturali.**

L'insieme dei *numeri naturali* è costituito dai numeri che si ottengono aggiungendo via via ad 1 l'unità (è costituito dall'insieme dei numeri interi positivi, escluso lo 0):

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}: \quad 1 \in N, n \in N \Rightarrow n + 1 \in N$$

$$n = 1 + 1$$

$$n' = n + 1$$

$$n'' = n' + 1$$

.....

Insieme dei numeri interi.

Si definisce insieme dei *numeri interi*, e si indica con I :

$$I = \{m - n; m, n \in N\}$$

Insieme dei numeri razionali.

Si definisce insieme dei *numeri razionali*, e si indica con Q :

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}; m \in I, n \in N \right\}$$

Vale:

$$N \subset I \subset Q \subset R$$

Insieme dei numeri irrazionali.

Si definisce insieme dei *numeri irrazionali*:

$$R - Q$$

È l'insieme dei numeri che non possono essere ottenuti come rapporto fra due numeri interi.

Q non gode della proprietà di completezza, per esempio:

$$\sqrt{2} \notin Q \quad (\text{non è un numero razionale})$$

INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO E INSIEME INFERIORMENTE LIMITATO.

Prima di definire un insieme superiormente limitato, si definisce il maggiorante di un insieme.

Sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$$

$$m_1 \in \mathbf{R} \quad \text{è un maggiorante di } A \text{ se: } m_1 \geq a, \forall a \in A$$

Esempi:

$$A =]0,1[= \{x \in \mathbf{R}; 0 < x < 1\}$$

In questo caso (per es.):

$$m_1 = 2, m_1 = 3 \text{ sono maggioranti di } A.$$

Nel caso invece di:

$$A =]0, +\infty[$$

A non ha maggioranti.

Si dice che un insieme è superiormente limitato se ha dei maggioranti:

$$A \text{ è superiormente limitato} \Leftrightarrow \exists m_1 \in \mathbf{R}: m_1 \geq a, \forall a \in A$$

Definizione di estremo superiore.

Sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$$

Si definisce:

$$\lambda \in \mathbf{R}, \lambda = \sup A \quad (\lambda \text{ estremo superiore di } A)$$

Se:

- 1) $\lambda \geq a, \forall a \in A$
- 2) $m_1 \geq a, \forall a \in A \Rightarrow m_1 \geq \lambda$

Cioè λ deve essere maggiorante di A e fra tutti i maggioranti λ deve essere il più piccolo.

L'estremo superiore è unico.

In modo analogo, per la definizione di insieme inferiormente limitato, si definisce il minorante di un insieme:

Sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$$

$$m_2 \in \mathbf{R} \quad \text{è un minorante di } A \text{ se: } m_2 \leq a, \forall a \in A$$

Si dice che un insieme è inferiormente limitato se ha dei minoranti:

$$A \text{ è inferiormente limitato} \Leftrightarrow \exists m_2 \in \mathbf{R}: m_2 \leq a, \forall a \in A$$

Definizione di estremo inferiore.

Sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$$

Si definisce:

$$\mu \in \mathbf{R}, \mu = \inf A \quad (\mu \text{ estremo inferiore di } A)$$

Se:

- 1) $\mu \leq a, \forall a \in A$
- 2) $m_2 \leq a, \forall a \in A \Rightarrow m_2 \leq \mu$

Cioè μ deve essere minorante di A e fra tutti i minoranti μ deve essere il più grande.

L'estremo inferiore è unico.

Massimi e minimi di un insieme.

Si dice che:

$A \subseteq \mathbf{R}$ è dotato di massimo

Se e solo se:

$\exists \sup A, \sup A \in A$

Il massimo è l'estremo superiore quando questo appartiene all'insieme (in caso contrario l'insieme non ha massimo).

Nel caso in cui l'insieme abbia massimo:

$\max A = \sup A$

Esempi:

$A =]0,1[\quad 1 = \sup A, 1 \notin A \quad \Rightarrow A$ non ha massimo

$A =]0,1] \quad 1 = \sup A, 1 \in A \quad \Rightarrow A$ ha massimo

Si dice che:

$A \subseteq \mathbf{R}$ è dotato di minimo

Se e solo se:

$\exists \inf A, \inf A \in A$

Il minimo è l'estremo inferiore quando questo appartiene all'insieme (in caso contrario l'insieme non ha minimo).

Nel caso in cui l'insieme abbia minimo:

$\min A = \inf A$

Esempi:

$A =]0,1[\quad 0 = \inf A, 0 \notin A \quad \Rightarrow A$ non ha minimo

$A = [0,1[\quad 0 = \inf A, 0 \in A \quad \Rightarrow A$ ha minimo

VALORE ASSOLUTO.

Sia:

$$x \in \mathbf{R}$$

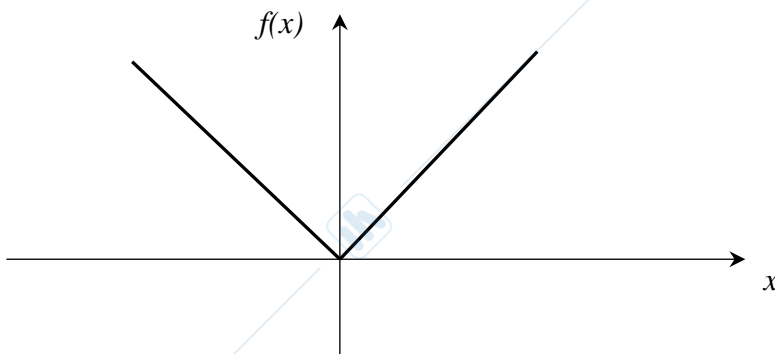
Si definisce valore assoluto di x :

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto di x è uguale a x se x è positivo, è uguale a $-x$ se x è negativo.Si può definire la funzione *valore assoluto*:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad , f(x) = |x|$$

Il grafico della funzione valore assoluto è:



Per il valore assoluto valgono le seguenti proprietà:

- i) $|x| \geq 0 \quad , = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii) $|x| \geq x \quad , \forall x \in \mathbf{R}$
- iii) $|xy| = |x| \cdot |y| \quad , \forall x, y \in \mathbf{R}$
- iv) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad , \forall x, y \in \mathbf{R}$
- v) $|x + y| \geq |x| - |y| \quad , \forall x, y \in \mathbf{R}$

INTORNO DI UN PUNTO.

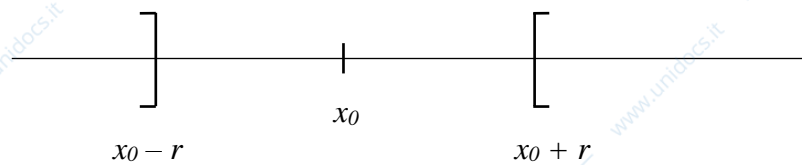
Sia:

$$x_0 \in \mathbf{R}$$

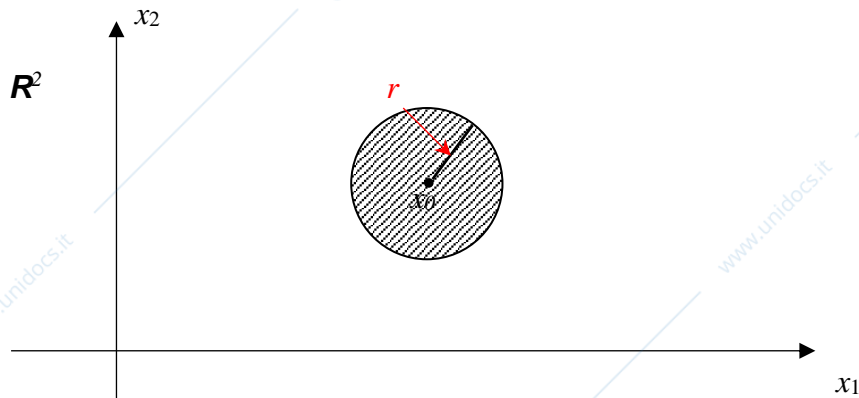
Si chiama intorno circolare di raggio $r > 0$ l'insieme:

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}; |x - x_0| < r\} \quad (\text{è un insieme } \underline{\text{aperto}})$$

L'intorno è un intervallo centrato in x_0 di ampiezza $2r$, privato del bordo (cioè degli estremi).



In uno spazio a due dimensioni \mathbf{R}^2 l'intorno circolare di un punto x_0 è il cerchio di raggio r e centro x_0 , privato della circonferenza bordo del cerchio.



In \mathbf{R}^3 l'intorno circolare di un punto x_0 è una sfera.

PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

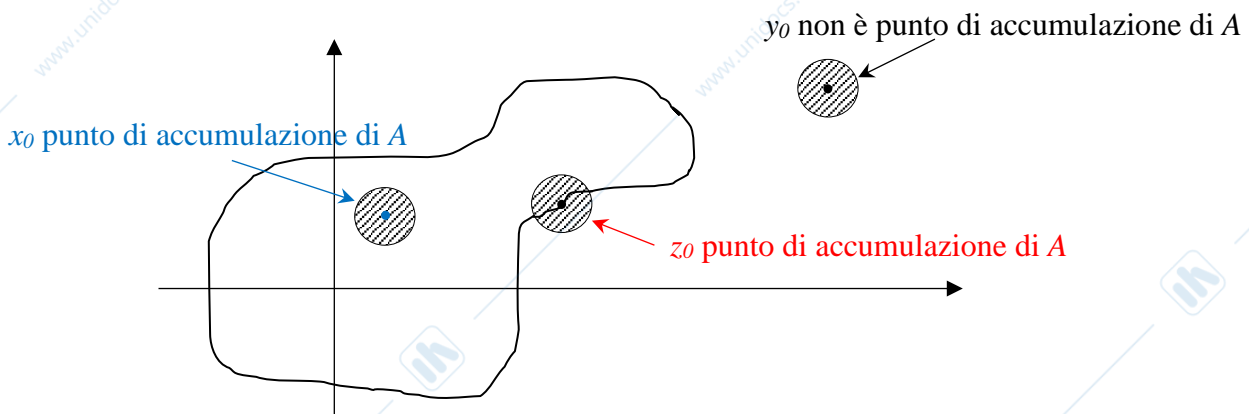
Si definisce:

x_0 punto di accumulazione (dei punti) di A , $A \subseteq \mathbf{R} \Leftrightarrow$

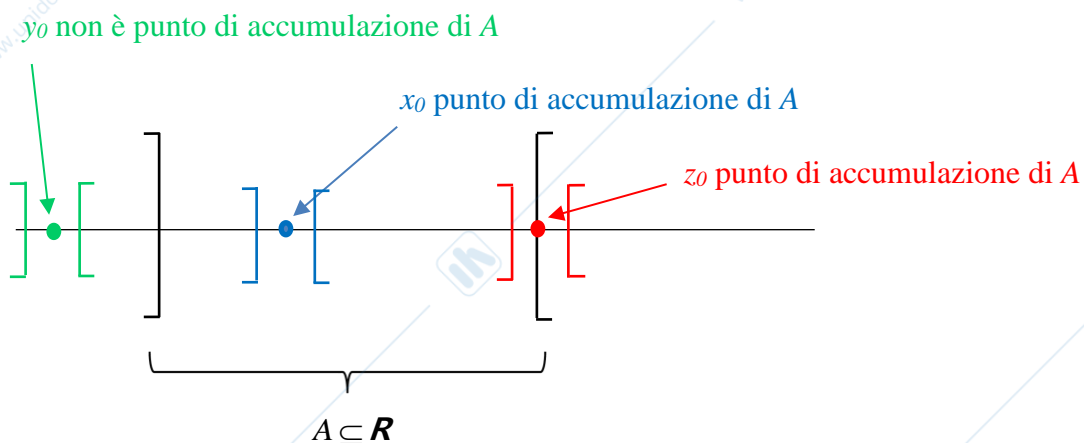
$\forall \varepsilon > 0 \quad S(x_0, \varepsilon) \cap A \quad \text{è infinito}$

Cioè se l'intersezione dell'intorno di x_0 con l'insieme A è un insieme infinito (contiene infiniti punti).

Esempio grafico per uno spazio bidimensionale \mathbf{R}^2 :



Esempio grafico per l'insieme dei numeri reali \mathbf{R} :



DERIVATO DI UN INSIEME.

Si definisce derivato di A e si indica con $D(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A:

$$x_0 \in D(A) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \text{ è punto di accumulazione di } A.$$

È un modo simbolico di rappresentare l'insieme dei punti di accumulazione, "utile" per le considerazioni sui limiti.

Alcune considerazioni su $+\infty$ e $-\infty$.

Anche se $+\infty, -\infty \notin \mathbf{R}$ occorre definire degli intorni di $+\infty$ e $-\infty$.

Si definisce:

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R}; x > a\}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R}; x < b\}$$

$+\infty$ e $-\infty$ sono punti di accumulazione quando vale:

$$+\infty \in D(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad]a, +\infty[\cap A \quad \text{è infinito}$$

$$-\infty \in D(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall b \in \mathbf{R}, \quad]-\infty, b[\cap A \quad \text{è infinito}$$

Cioè quando in ogni intorno di $+\infty$ o $-\infty$ ci sono infiniti punti di A.

Graficamente:

