

DEFINIZIONE DI DERIVATA SECONDA O DI ORDINE 2.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad \exists f'(x) \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in A$$

Si considera la funzione che ad ogni x associa la sua derivata:

$$x \rightarrow f'(x), \quad f' : A \rightarrow \mathbf{R}$$

e un punto:

$$x_0 \in A \cap D(A)$$

Se esiste la derivata prima della funzione f' nel punto x_0 (cioè la derivata prima della derivata prima di f nel punto x_0), la si chiama derivata seconda nel punto x_0 :

$$\frac{d}{dx}(f'(x_0)) \equiv (f')'(x_0) = f''(x_0) \equiv \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_0}$$

Per definire la derivata 2° in un punto, occorre che la funzione abbia la derivata 1° in un intorno di quel punto.

Analogamente, se:

$$\exists f''(x) \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in A$$

Si considera la funzione che associa ad x la sua derivata seconda:

$$x \rightarrow f''(x), \quad f'' : A \rightarrow \mathbf{R}$$

e si definisce la derivata terza nel punto x_0 :

$$\frac{d}{dx}(f''(x_0)) \equiv (f'')'(x_0) = f'''(x_0) \equiv \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_{x=x_0}$$

In modo analogo, si possono definire la derivata quarta, la derivata quinta, ecc.

FUNZIONI MONOTONE CRESCENTI E DECRESCENTI IN UN INTERVALLO.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad A \text{ intervallo di } \mathbf{R}$$

Si dice che:

i) f è monotona crescente debolmente se:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

ii) f è monotona crescente strettamente se:

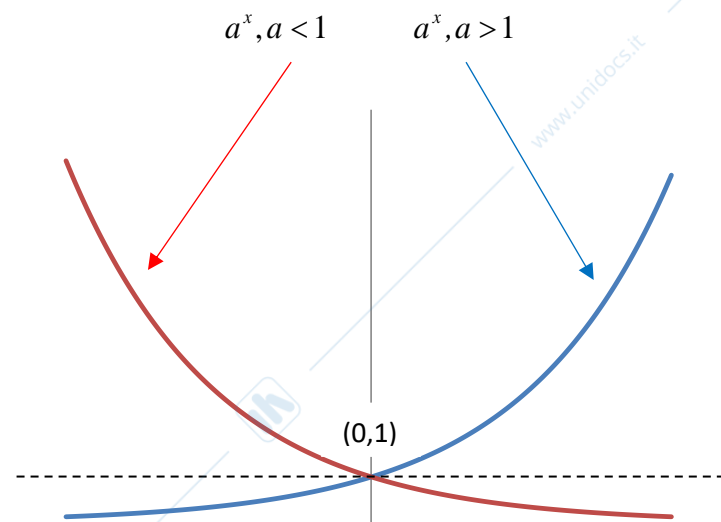
$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

iii) f è monotona decrescente debolmente se:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$

iv) f è monotona decrescente strettamente se:

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$$

Esempio:

Si può osservare che:

$$a^x, a > 1 \quad x < x' \Rightarrow a^x < a^{x'} \quad \text{la funzione esponenziale è } \underline{\text{crescente}} \text{ strettamente}$$

$$a^x, a < 1 \quad x < x' \Rightarrow a^x > a^{x'} \quad \text{la funzione esponenziale è } \underline{\text{decrescente}} \text{ strettamente}$$

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI IN UN PUNTO.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad A \text{ intervallo di } \mathbf{R}, \quad x_0 \in A$$

Si dice che:

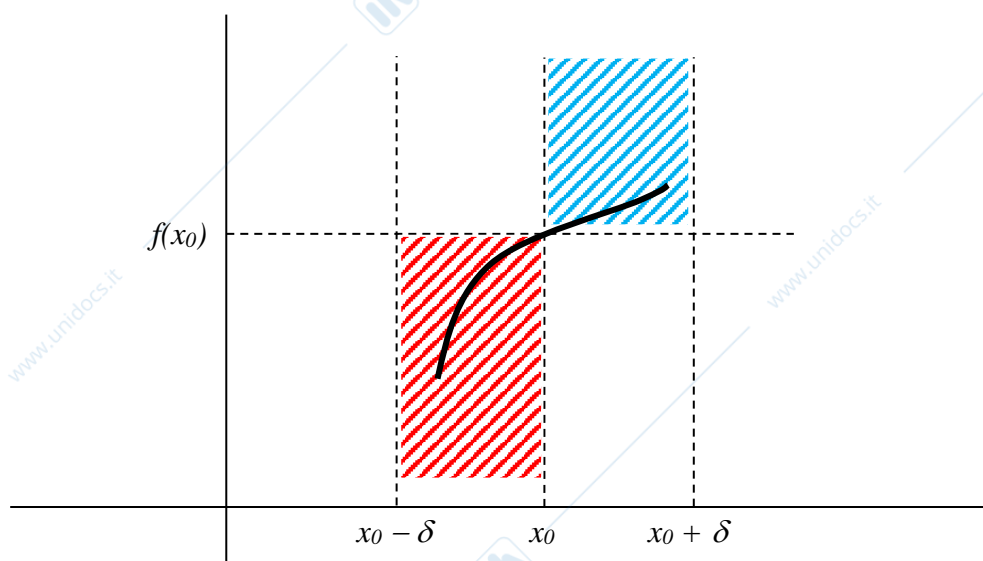
 f è crescente (c.) in x_0 se:

$$\exists \delta > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (f \text{ c. debolmente})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (f \text{ c. strettamente})$$

Il grafico di una funzione f crescente dovrà trovarsi rispetto ad un punto x_0 nelle regioni schematizzate graficamente di seguito:



Il grafico a destra del punto x_0 si troverà nella regione evidenziata in azzurro.

Il grafico a sinistra del punto x_0 si troverà nella regione evidenziata in rosso.

Si dice che:

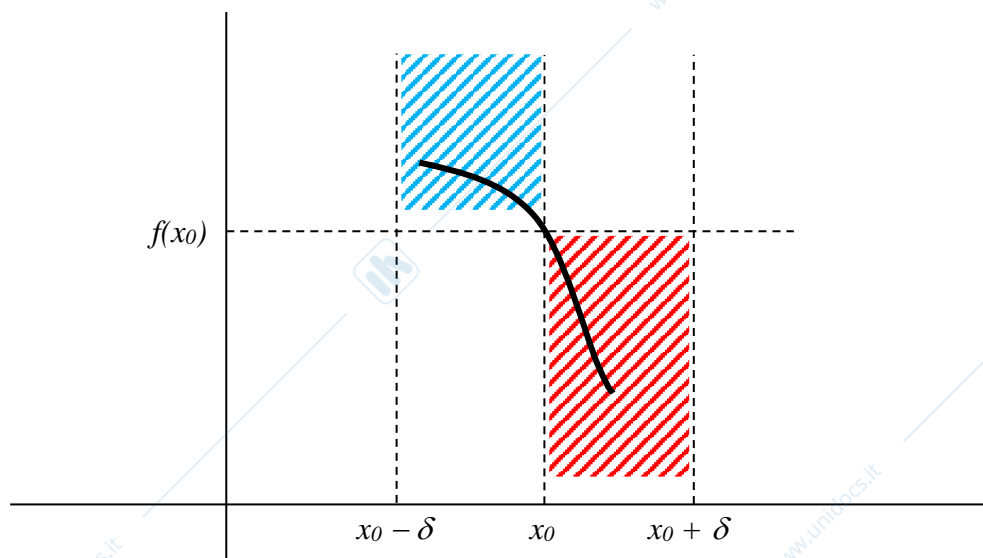
f è decescente (d.) in x_0 se:

$$\exists \delta > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (f \text{ d. debolmente})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad (f \text{ d. strettamente})$$

Il grafico di una funzione f decrescente dovrà trovarsi rispetto ad un punto x_0 nelle regioni schematizzate graficamente di seguito:



Il grafico a destra del punto x_0 si troverà nella regione evidenziata in rosso.

Il grafico a sinistra del punto x_0 si troverà nella regione evidenziata in azzurro.

Si può osservare che nella definizione di funzione crescente e funzione decrescente compare il rapporto incrementale.

Per cui, se si ha:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad A \text{ intervallo di } \mathbf{R}, \quad x_0 \in A, \quad \exists f'(x_0)$$

Vale:

$$\text{i) } \quad \frac{d}{dx} f(x_0) \equiv f'(x_0) > 0 \quad f \text{ è monotona crescente strettamente}$$

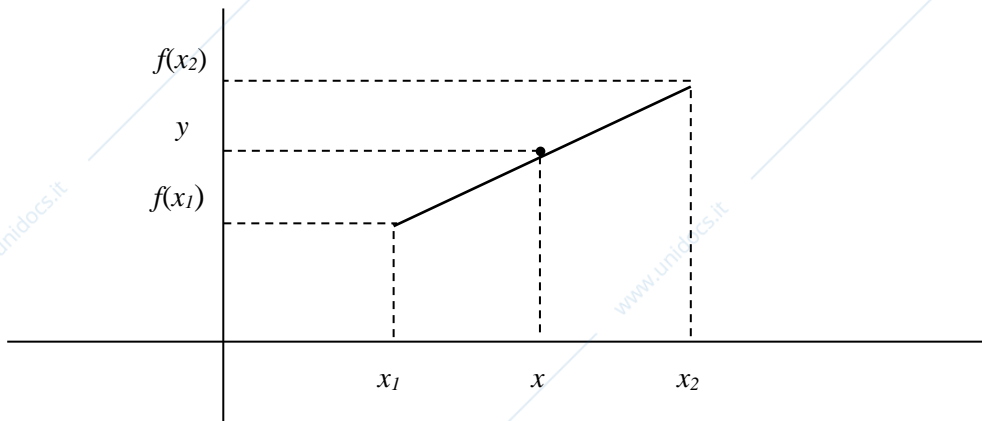
- ii) $\frac{d}{dx} f(x_0) \equiv f'(x_0) < 0$ f è monotona decrescente strettamente

FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE.

Sia:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

Si consideri graficamente il segmento di retta con gli estremi di coordinate $x_1, f(x_1)$ e $x_2, f(x_2)$:



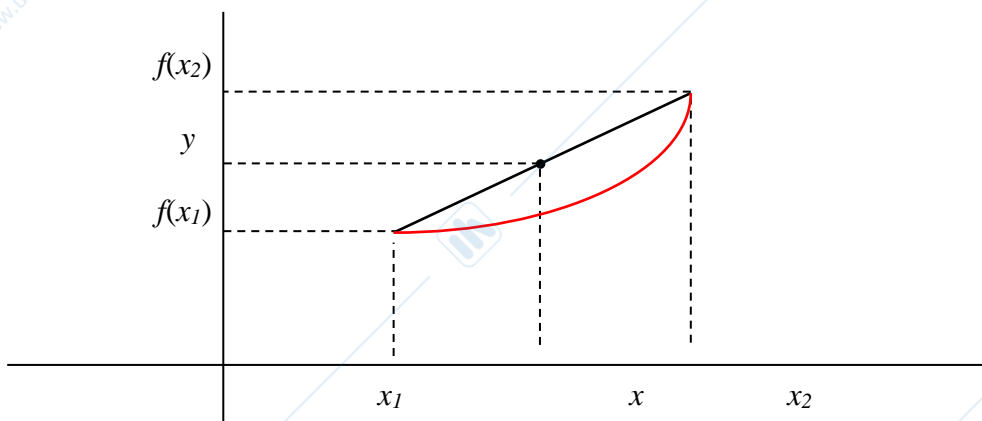
Un generico punto x sarà dato da:

$$x = x_2 + t \cdot (x_1 - x_2) = t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2, \quad t \in [0, 1]$$

Di conseguenza un generico punto y sul segmento di retta sarà dato da:

$$y = t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

Una funzione convessa è rappresentata graficamente come:

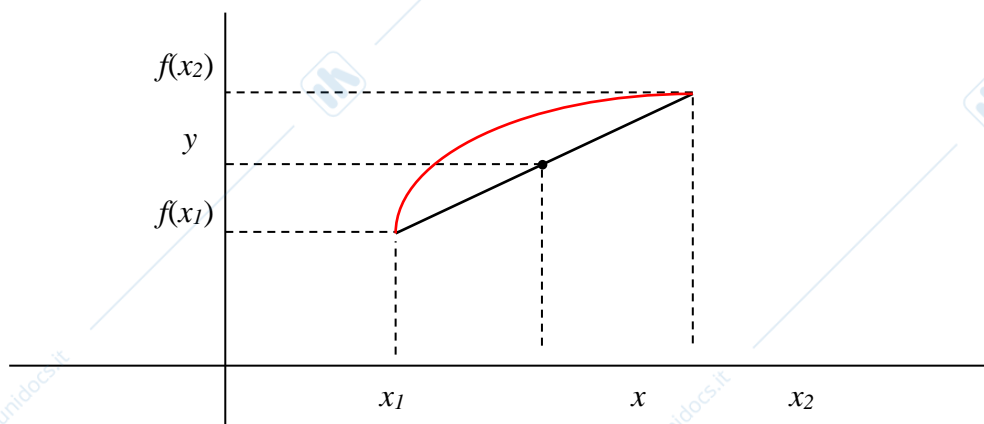


I valori della funzione sono inferiori ai valori y del segmento di retta, per cui, per un generico punto y , vale:

$$y = f(x) = f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

Un esempio di funzione convessa è la funzione esponenziale.

Una funzione concava è rappresentata graficamente come:



I valori della funzione sono superiori ai valori y del segmento di retta, per cui, per un generico punto y , vale:

$$y = f(x) = f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \geq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

Un esempio di funzione concava è la funzione logaritmo.

Sia:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R} \quad , \quad \exists f', f''$$

Si dice che:

$$f \text{ è } \underline{\text{convessa}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad , \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

$$f \text{ è } \underline{\text{concava}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad , \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \geq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

Dalle due definizioni può essere dimostrato che (la dimostrazione non viene fatta):

$$f \text{ è } \underline{\text{convessa}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \quad \text{è una funzione crescente}$$

$$f \text{ è } \underline{\text{concava}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \quad \text{è una funzione decrescente}$$

Per cui, considerando la derivata della funzione $f'(x)$, si ha che:

$$i) \quad f''(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ è crescente e } f(x) \text{ è } \underline{\text{convessa}}$$

ii) $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$ \Rightarrow $f'(x)$ è decrescente e $f(x)$ è concava

MASSIMO E MINIMO DI UNA FUNZIONE.

Sia:

$A \subseteq \mathbf{R}$, A intervallo di \mathbf{R}

Come visto in precedenza:

$A \subseteq \mathbf{R}$ è dotato di massimo

se e solo se:

$\exists \sup A$, $\sup A \in A$

Il massimo è l'estremo superiore quando questo appartiene all'insieme (in caso contrario l'insieme non ha massimo).

Nel caso in cui l'insieme abbia massimo:

$\max A = \sup A$

In modo analogo:

$A \subseteq \mathbf{R}$ è dotato di minimo

se e solo se:

$\exists \inf A$, $\inf A \in A$

Il minimo è l'estremo inferiore quando questo appartiene all'insieme (in caso contrario l'insieme non ha minimo).

Nel caso in cui l'insieme abbia minimo:

$\min A = \inf A$

Si considerino per esempio gli intervalli:

$A =]0,1[$ $0 = \inf A, 0 \notin A$ $1 = \sup A, 1 \notin A$ $\Rightarrow A$ non ha né minimo né massimo

$A = [0,1]$ $0 = \inf A, 0 \in A$ $1 = \sup A, 1 \in A$ $\Rightarrow A$ ha minimo e massimo

Per estendere la nozione di massimo e minimo alle funzioni, si considera il codominio.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}$$

In precedenza era stato definito codominio di una funzione:

$$f : A \rightarrow B$$

$$\mathcal{C}(f) = \{b \in B; \exists a \in A : b = f(a)\}$$

Il codominio è l'insieme degli elementi b appartenenti a B , che godono della proprietà che esiste un elemento a appartenente ad A , tale che b sia l'immagine attraverso f di a (espressa da $b = f(a)$).

Il codominio, quindi, è la totalità degli elementi di B che hanno un punto in A .

Più sinteticamente, il codominio può essere definito come:

$$\mathcal{C}(f) = \{f(x); x \in A\}$$

Se il codominio è superiormente limitato, si dice che la funzione f è superiormente limitata, e si indica come:

$$\sup_A f = \sup \mathcal{C}(f)$$

Se il codominio è inferiormente limitato, si dice che la funzione f è inferiormente limitata, e si indica come:

$$\inf_A f = \inf \mathcal{C}(f)$$

La funzione f è dotata di massimo, quando il codominio è dotato di massimo:

$$\exists \sup \mathcal{C}(f) \in \mathcal{C}(f) \quad \Rightarrow \quad \sup \mathcal{C}(f) = \max \mathcal{C}(f)$$

$$\max f = \sup_A f \equiv \sup \mathcal{C}(f)$$

La funzione f è dotata di minimo, quando il codominio è dotato di minimo:

$$\exists \inf \mathcal{C}(f) \in \mathcal{C}(f) \quad \Rightarrow \quad \inf \mathcal{C}(f) = \min \mathcal{C}(f)$$

$$\min f = \inf_A f \equiv \inf \mathcal{C}(f)$$

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in A$$

Si definisce:

 x_0 punto di massimo relativo debole di f se:

$$\exists \delta > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Se:

$$f(x) < f(x_0) \quad x_0 \text{ è punto di massimo relativo } \underline{\text{forte}}$$

Si definisce:

 x_0 punto di minimo relativo debole di f se:

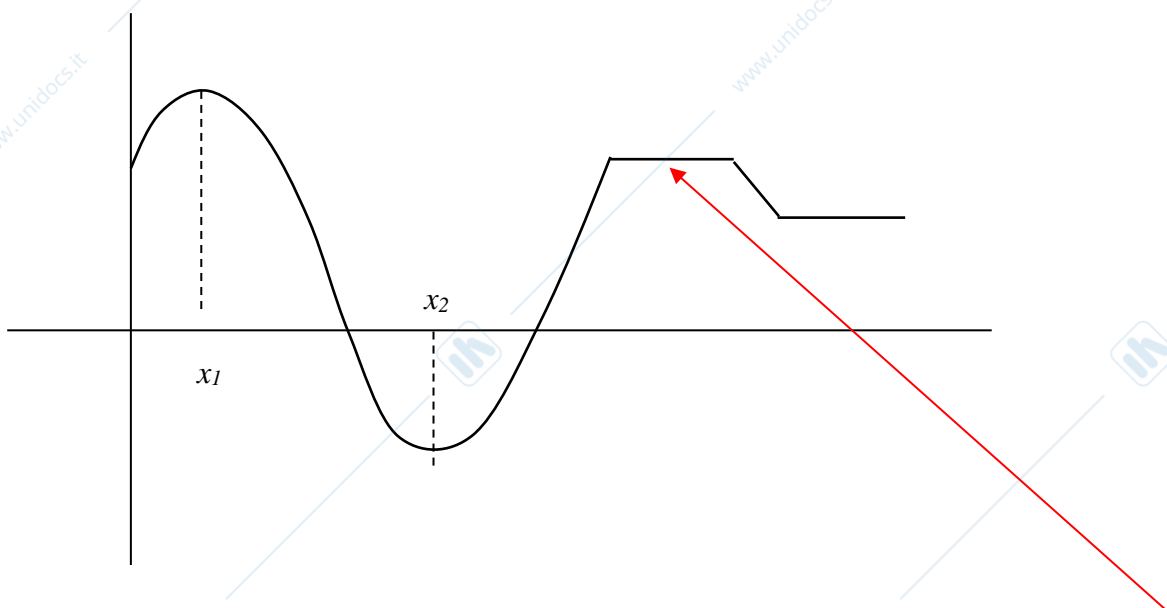
$$\exists \delta > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Se:

$$f(x) > f(x_0) \quad x_0 \text{ è punto di minimo relativo } \underline{\text{forte}}$$

Si considera l'esempio grafico:



x_1 è un punto di massimo relativo forte e x_2 è un punto di minimo relativo forte, mentre i punti di questo intervallo sono punti di massimo relativo debole.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad A \text{ intervallo di } \mathbf{R}, \quad x_0 \in \text{int}(A) \text{ (punto interno ad } A), \quad \exists f'(x_0)$$

Se:

$$x_0 \text{ è punto di max} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Si può verificare facilmente con le seguenti considerazioni.

Se fosse:

$$f'(x_0) > 0$$

La funzione sarebbe crescente in x_0 , quindi vi sarebbero punti x a destra di x_0 , in un intorno arbitrario di x_0 , tali che:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{che contrasta con il fatto che } x_0 \text{ è punto di max.}$$

Se invece fosse:

$$f'(x_0) < 0$$

La funzione sarebbe decrescente in x_0 , quindi vi sarebbero punti x a sinistra di x_0 , in un intorno arbitrario di x_0 , tali che:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{che contrasta con il fatto che } x_0 \text{ è punto di max.}$$

Si può quindi concludere che se:

$$x_0 \text{ è punto di max,} \quad \exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Analogamente per il punto di minimo:

$$x_0 \text{ è punto di min} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Anche in questo caso, se fosse:

$$f'(x_0) > 0$$

La funzione sarebbe crescente in x_0 , quindi vi sarebbero punti x a sinistra di x_0 , in un intorno arbitrario di x_0 , tali che:

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{che contrasta con il fatto che } x_0 \text{ è punto di min.}$$

Se invece fosse:

$$f'(x_0) < 0$$

La funzione sarebbe decrescente in x_0 , quindi vi sarebbero punti x a destra di x_0 , in un intorno arbitrario di x_0 , tali che:

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{che contrasta con il fatto che } x_0 \text{ è punto di min.}$$

Si può quindi concludere che se:

$$x_0 \text{ è } \underline{\text{punto di min.}}, \quad \exists f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

Il fatto che la derivata prima sia nulla è una condizione necessaria per l'esistenza di un punto di massimo o di minimo, ma non sufficiente.

Si può osservare che:

- in corrispondenza di un *punto di massimo* la funzione è *concava*;
- in corrispondenza di un *punto di minimo* la funzione è *convessa*.

Questo permette di dire che, sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, \quad A \text{ intervallo di } \mathbf{R}, \quad x_0 \in \text{int}(A), \text{ (punto interno ad } A), \quad \exists f'(x_0), f''(x_0)$$

Se:

$$x_0 \text{ è punto di max} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0$$

$$x_0 \text{ è punto di min} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0$$

PUNTI DI FLESSO.

Sia:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad , \quad \exists f', f''$$

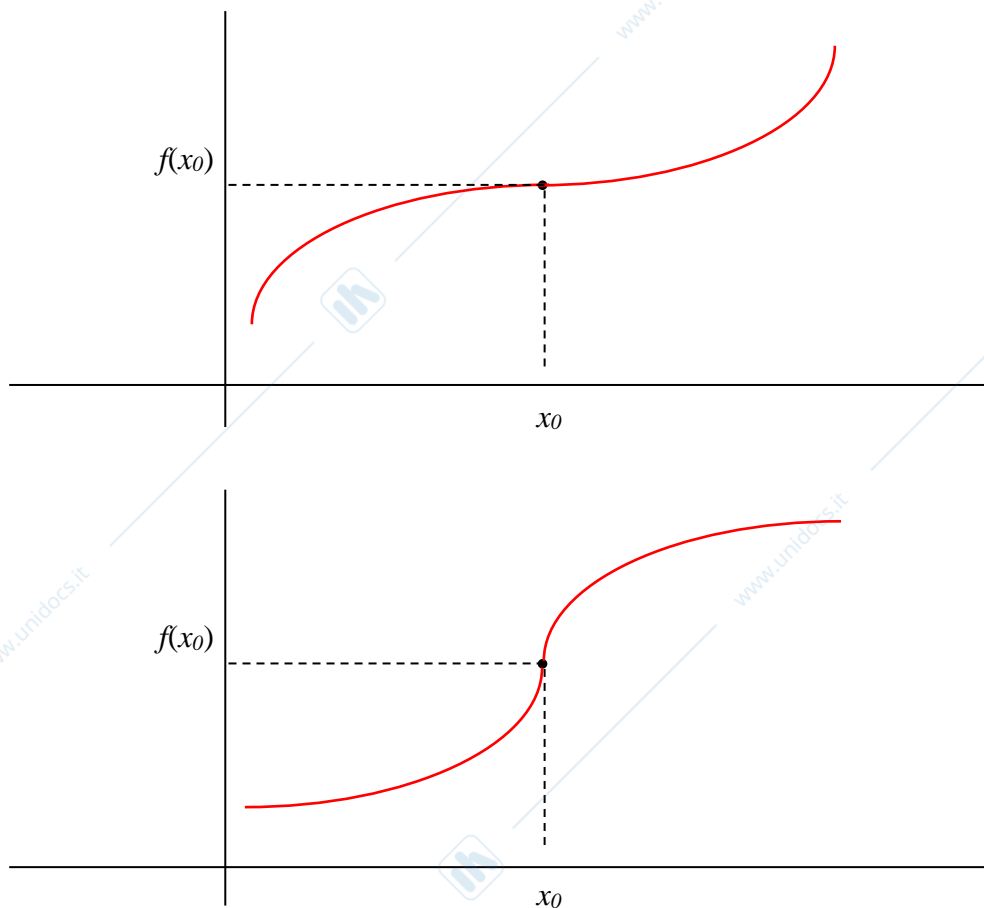
Nello specifico:

$$A = [a, b] \quad , \quad x_0 \in \text{int}(A), \text{ (punto interno ad } A), \quad \exists f'(x_0), f''(x_0)$$

Si definisce x_0 punto di flesso se:

- a sinistra del punto x_0 la funzione è *concava*, a destra la funzione è *convessa*;
- a sinistra del punto x_0 la funzione è *convessa*, a destra la funzione è *concava*.

Graficamente:

Questo permette di dire che x_0 è **un punto di flesso**, se:

- $f''(x_0) = 0$, $f''(x) < 0$ a sinistra di x_0 , $f''(x) > 0$ a destra di x_0 ;
- $f''(x_0) = 0$, $f''(x) > 0$ a sinistra di x_0 , $f''(x) < 0$ a destra di x_0 ;

ASINTOTI DI UNA FUNZIONE.

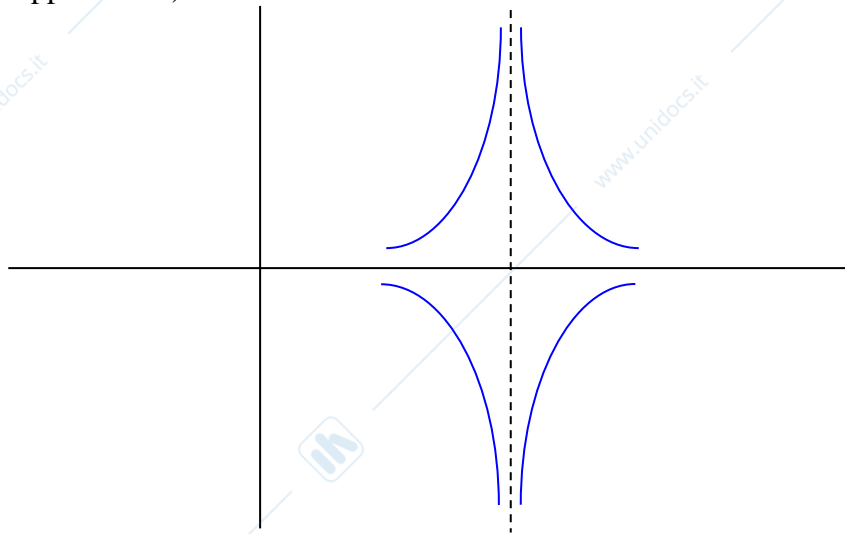
Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R} \quad , \quad A \subseteq \mathbf{R}$$

La funzione presenta un **asintoto verticale** in corrispondenza della retta $x = x_0$ parallela all'asse y , se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

Graficamente, i casi che si possono riscontrare sono (al massimo due contemporaneamente fra i quattro rappresentati):

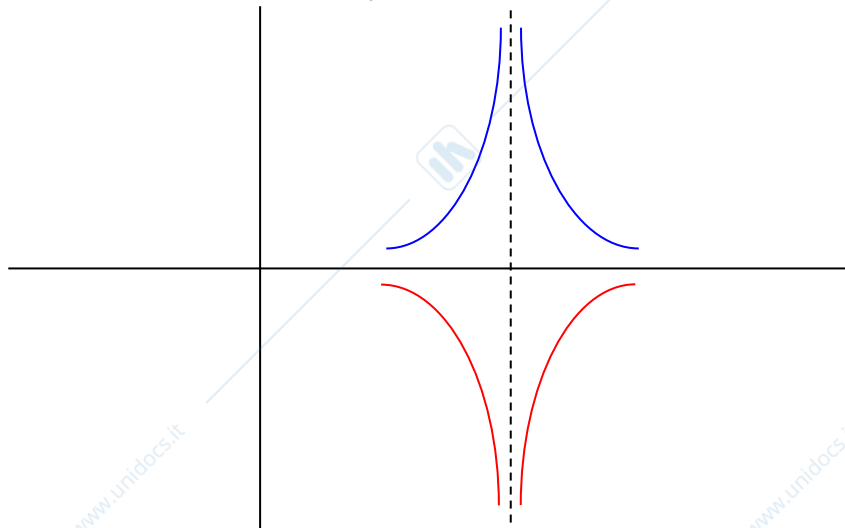


In particolare, si possono verificare i seguenti casi:

$$1^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

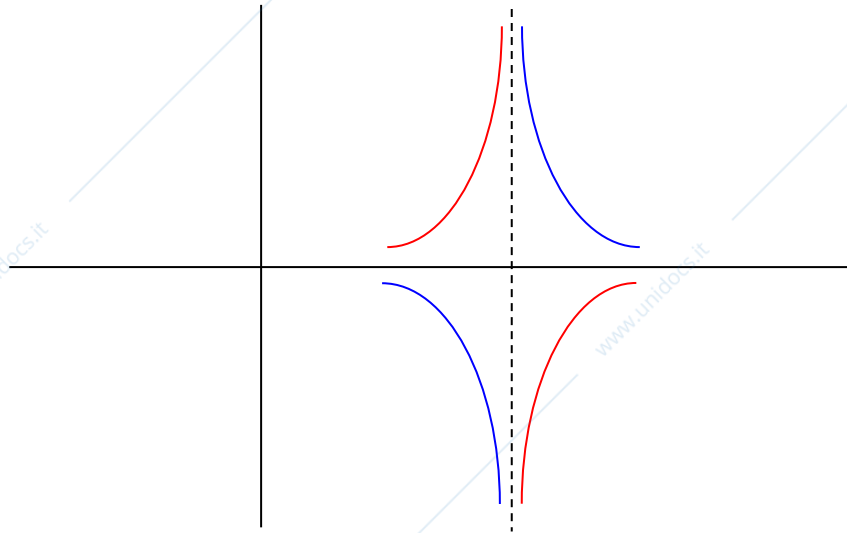
Il grafico della funzione presenta due rami infiniti, entrambi nello stesso semipiano rispetto all'asse x , che hanno lo stesso asintoto $x = x_0$:



$$2^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad (+\infty)$$

Il grafico della funzione presenta due rami infiniti. uno per ogni semipiano ($y > 0$, $y < 0$) rispetto all'asse x , che hanno lo stesso asintoto $x = x_0$:

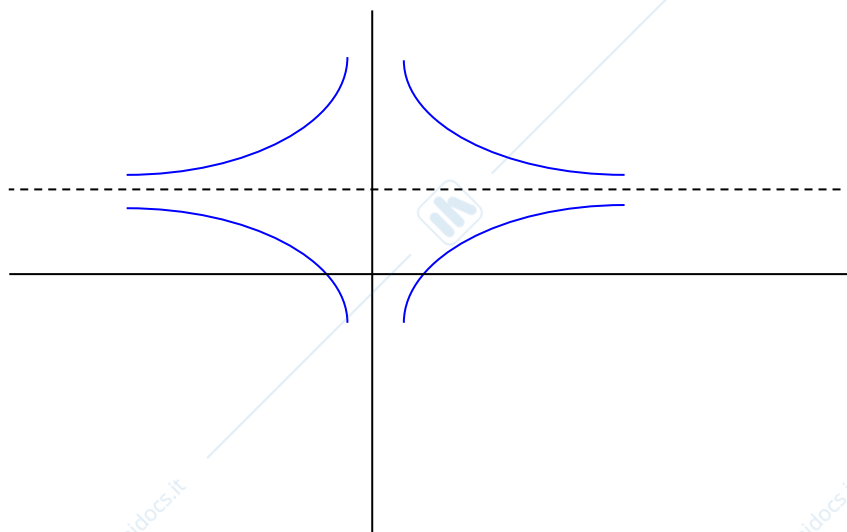


3°) La funzione può presentare un solo ramo infinito che ha asintoto $x = x_0$.

La funzione presenta un **asintoto orizzontale** in corrispondenza della retta $y = l$ parallela all'asse x , se:

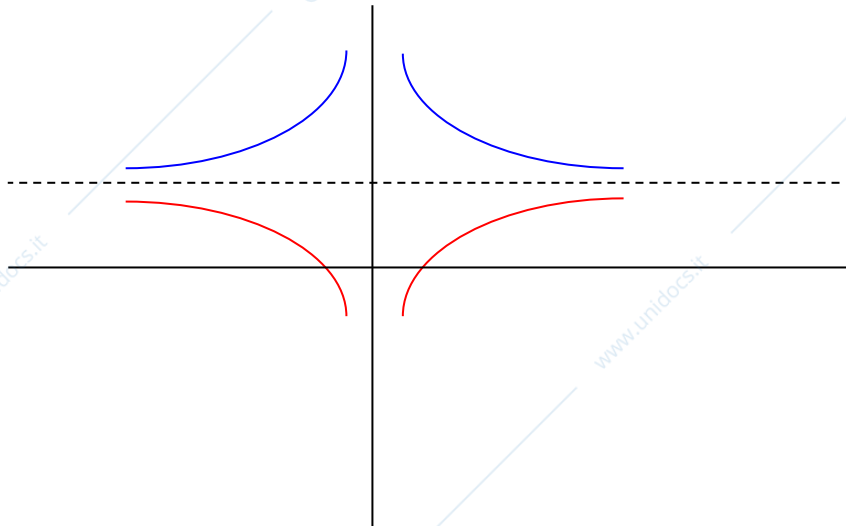
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \quad l \in \mathbf{R}$$

Graficamente, i casi che si possono riscontrare sono (al massimo due contemporaneamente fra i quattro rappresentati):

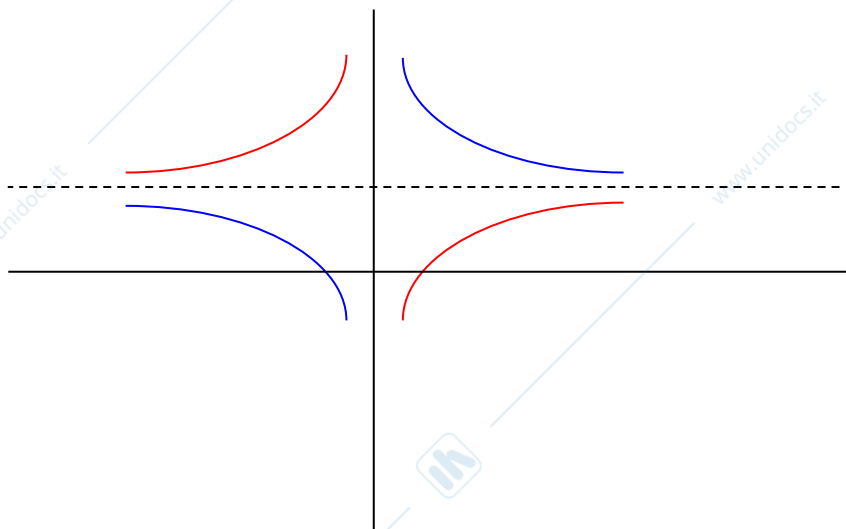


In particolare, si possono verificare i seguenti casi:

- 1°) Il grafico della funzione può presentare un solo ramo infinito che ha asintoto $y = l$.
- 2°) Il grafico della funzione presenta due rami infiniti ($y \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$), entrambi nello stesso semipiano rispetto alla retta $y = l$, che hanno lo stesso asintoto $y = l$:



- 3°) Il grafico della funzione presenta due rami infiniti ($y \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$), uno per ogni semipiano rispetto alla retta $y = l$, che hanno lo stesso asintoto $y = l$:



Se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$$

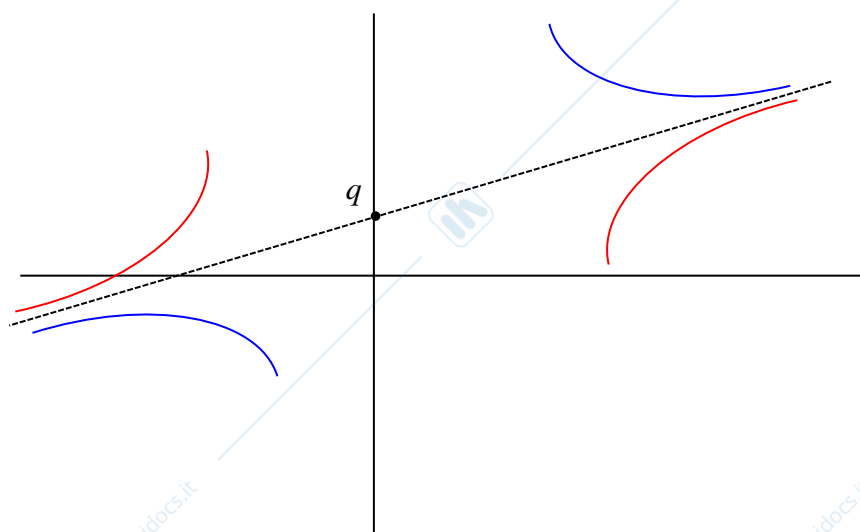
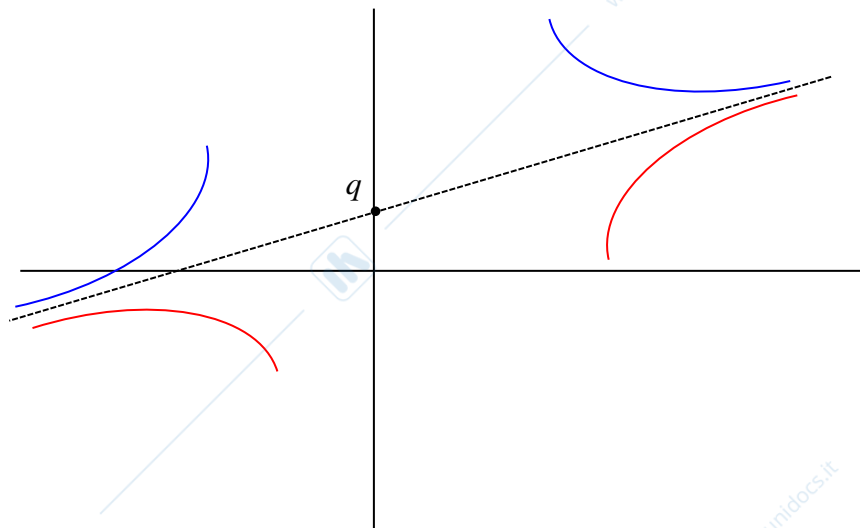
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$$

Si possono presentare due casi:

- La funzione non ha asintoti.
- La funzione presenta un **asintoto obliquo** in corrispondenza della retta:

$$y = mx + q$$

Graficamente (al massimo due casi contemporaneamente fra i quattro rappresentati):



La funzione presenta un **asintoto obliquo** in corrispondenza della retta:

$$y = mx + q$$

se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = q \quad m, q \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = q \quad m, q \in \mathbf{R}$$

Infatti, se la funzione presenta un asintoto in corrispondenza della retta, deve essere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + q) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(m + \frac{q}{x} \right) = m + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q}{x} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + q) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} q = q$$

Vale una condizione analoga per $x \rightarrow -\infty$ (possono essere verificate entrambe o una sola).

Se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

La funzione **non ha** asintoti obliqui.

ESERCIZI

Si indichi il dominio di definizione delle funzioni seguenti e se ne calcoli la derivata.

16) $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$

17) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

18) $f(x) = \tan\left(-\frac{x}{3} + 2\right)$

19) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x}$

20) $f(x) = \sin(\log x)$

21) $f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$

22) $f(x) = \log(\sin x)$

23) $f(x) = \log \sqrt{1 + x^2}$

24) $f(x) = e^{\sin x}$

25) $f(x) = \frac{1}{\sin x + 1}$

26) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$

27) $f(x) = \sqrt{1 + x^a}$

Si indichi il dominio di definizione della funzione seguente e se ne calcoli il limite.

28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Esercizio 16.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$$

Il dominio di definizione della funzione coincide con il dominio della funzione *tangente* (per le funzioni *seno* e *coseno* il dominio è \mathbf{R}):

$$f : \mathbf{R} - \left\{ \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è una somma di funzioni.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sin x + \cos x + \tan x) &= \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= \cos x - \sin x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \cos x - \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \cos x - \sin x + 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} (\sin x + \cos x + \tan x) = \cos x - \sin x + 1 + \tan^2 x$$

Esercizio 17.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione *seno* (sia al numeratore che al denominatore), quindi \mathbf{R} , - i valori in cui si annulla il denominatore:

$$1 - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in I$$

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} - \left\{ \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è un rapporto di funzioni, per cui la derivata è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) &= \frac{\cos x(1 - \sin x) - (1 + \sin x)(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \\ &= \frac{\cos x - \sin x \cos x + \cos x + \sin x \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \\ &= \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

Esercizio 18.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \tan\left(-\frac{x}{3} + 2\right)$$

Il dominio della funzione *tangente* sarebbe:

$$f : \mathbf{R} - \left\{ \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

In questo caso, considerando l'argomento della funzione *tangente*, deve essere:

$$-\frac{x}{3} + 2 \neq \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} \neq 2 - \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \Rightarrow \quad x \neq 6 - 3 \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi$$

Il dominio della funzione è:

$$D : \mathbf{R} - \left\{ 6 - 3 \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \right\}$$

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} - \left\{ 6 - 3 \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\tan\left(-\frac{x}{3} + 2\right) \right] &= \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{x}{3} + 2\right)} \cdot \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{3} + 2 \right) = \\ &= -\frac{1}{3 \cdot \cos^2\left(-\frac{x}{3} + 2\right)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \left[\tan\left(-\frac{x}{3} + 2\right) \right] = -\frac{1}{3 \cdot \cos^2\left(-\frac{x}{3} + 2\right)}$$

Esercizio 19.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x}$$

Il dominio di definizione della funzione è \mathbf{R} :

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sqrt[3]{\cos^2 x}) &= \frac{d}{dx} (\cos x)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot (\cos x)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (-\sin x) = -\frac{2}{3} \cdot \sin x \cdot (\cos x)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{2 \sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{\cos x}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} (\sqrt[3]{\cos^2 x}) = -\frac{2 \sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{\cos x}}$$

Esercizio 20.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \sin(\log x)$$

L'argomento della funzione *seno* è la funzione *logaritmo*, per cui vale:

$$\sin: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\log: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

Il dominio di definizione della funzione è \mathbf{R}^+ :

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è:

$$\frac{d}{dx} [\sin(\log x)] = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = x^{-1} \cdot \cos(\log x)$$

Esercizio 21.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione *logaritmo* (che si trova sia al numeratore che al denominatore), \mathbf{R}^+ , - i valori in cui si annulla il denominatore:

$$\log x - 1 = 0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow e^{\log x} = e^1 \Rightarrow x = e$$

Il dominio della funzione è:

$$D: \mathbf{R}^+ - \{e\} \equiv]0, e[\cup]e, +\infty[$$

La funzione è definita da:

$$f: \mathbf{R}^+ - \{e\} \rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è un rapporto tra funzioni, per cui la derivata è:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x + 1}{\log x - 1} \right) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (\log x - 1) - (\log x + 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \frac{\log x - 1 - \log x - 1}{x \cdot (\log x - 1)^2} = \\ &= \frac{-2}{x \cdot (\log x - 1)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\log x + 1}{\log x - 1} \right) = -\frac{2}{x \cdot (\log x - 1)^2}$$

Esercizio 22.

Calcolare la derivata della funzione:

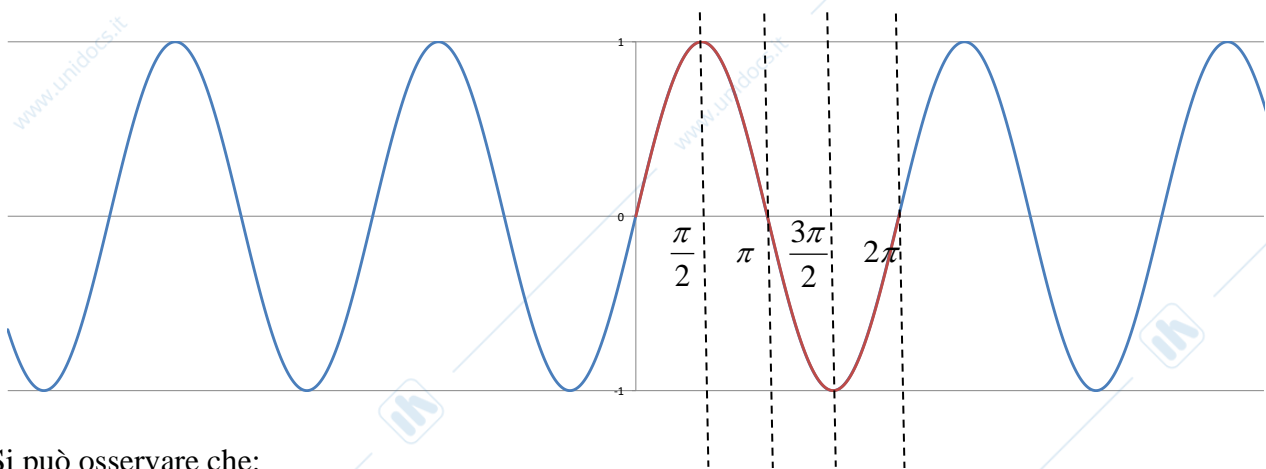
$$f(x) = \log(\sin x)$$

Occorre determinare il dominio della funzione. La funzione *logaritmo* è definita:

$$f(x) = \log x \quad f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbf{R}^+$$

Nel caso in esame, l'argomento della funzione *logaritmo* è la funzione *seno*, per cui la funzione può essere definita solo per i valori per cui vale $\sin x > 0$.

Il grafico della funzione *seno* è:



Si può osservare che:

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\quad , \quad k \in \mathbf{I}$$

L'insieme degli intervalli così definiti costituisce il dominio della funzione:

$$f(x) = \log(\sin x) \quad f:]2k\pi, (2k+1)\pi[\rightarrow \mathbf{R} \quad , \quad k \in \mathbf{I}$$

Per esempio:

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad]2k\pi, (2k+1)\pi[=]2\pi, 3\pi[$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad]2k\pi, (2k+1)\pi[=]0, \pi[$$

$$k = -1 \quad \Rightarrow \quad]2k\pi, (2k+1)\pi[=]-2\pi, -\pi[$$

La derivata è:

$$\frac{d}{dx} \log(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \log(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Esercizio 23.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \log \sqrt{1+x^2}$$

Il dominio di definizione della funzione è \mathbf{R} :

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Infatti, la funzione logaritmo è definita:

$$f(x) = \log x \quad f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbf{R}^+$$

Nel caso in esame:

$$f(x) = \log \sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+x^2} \geq 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

$f(x)$ è una funzione composta e la sua derivata è data da:

$$\frac{d}{dx} \log \sqrt{1+x^2} = \frac{d}{dx} \log(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log(1+x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \log \sqrt{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$$

Esercizio 24.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Il dominio di definizione della funzione è \mathbf{R} :

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è data da:

$$\frac{d}{dx} (e^{\sin x}) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

Esercizio 25.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + 1}$$

La funzione è definita su tutta la retta reale meno i punti in cui si annulla il denominatore:

$$\sin x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = -1$$

Che corrispondono ai punti:

$$\left\{ \left(2k - \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \right\}$$

Per cui:

$$f : \mathbf{R} - \left\{ \left(2k - \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è data da (derivata del reciproco di una funzione):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g(x)} \right) = - \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x + 1} \right) = - \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

Esercizio 26.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

Come visto nell'esercizio 25, la funzione è definita su tutta la retta reale meno i punti in cui si annulla il denominatore, per cui:

$$f : \mathbf{R} - \left\{ \left(2k - \frac{1}{2} \right) \pi; k \in \mathbf{I} \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è data da:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\sin x + 1} \right) = \frac{\cos x \cdot (\sin x + 1) - \sin x \cdot \cos x}{(\sin x + 1)^2} = \frac{\cos x \cdot \sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\sin x + 1} \right) = \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

Esercizio 27.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \sqrt{1+x^a}$$

Il dominio di definizione della funzione dipende dal valore di a .

Se a è un numero pari:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad a = 2k, k \in \mathbf{I}$$

Se a è un numero dispari:

$$f: [-1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} \quad a = 2k+1, k \in \mathbf{I}$$

In quest'ultimo caso, infatti, $\sqrt{1+x^a}$ è definita per:

$$1+x^a \geq 0 \Rightarrow x^a \geq -1 \Rightarrow x \geq (-1)^{\frac{1}{a}}$$

Più in generale, se a è un numero reale che non ricade nei casi precedenti:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad a \in \mathbf{R}$$

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

La derivata è:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^a}) = \frac{d}{dx}(1+x^a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (1+x^a)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(x^a) = \frac{1}{2} \cdot (1+x^a)^{-\frac{1}{2}} \cdot ax^{a-1}$$

O, in forma equivalente:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^a}) = \frac{ax^{a-1}}{2(1+x^a)^{\frac{1}{2}}} \equiv \frac{ax^{a-1}}{2\sqrt{1+x^a}}$$

Esercizio 28.

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

La funzione è definita su tutta la retta reale meno i punti in cui si annulla il denominatore:

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Quindi:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite appare nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Si può applicare la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1 - \cos x) = \sin x$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Il limite è quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZI SULLO STUDIO DI FUNZIONI.

Si studino le funzioni seguenti.

Nello specifico, indicare il dominio di definizione della funzione e determinare se esistono e quali sono i valori di:

- Intersezione con gli assi.
- Asintoti.
- Punti di massimo e/o di minimo.
- Punti di flesso.

Costruire il grafico della funzione.

29) $f(x) = x^3$

30) $f(x) = x^4$

31) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$

32) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

33) $f(x) = x^2 e^x$

34) $f(x) = x^2 \log x$

35) $f(x) = e^{-x^2}$

36) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$

Esercizio 29.

Si studi la funzione:

$$f(x) = x^3$$

Il dominio della funzione è \mathbf{R} :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Intersezione con gli assi.

Nello studio di funzioni, il primo passo è verificare se la funzione interseca gli assi x , y :

$$x = 0 \rightarrow f(0) = ?$$

$$y = f(x) = 0 \rightarrow x = ?$$

Nel caso in esame, la funzione interseca gli assi in corrispondenza dell'origine:

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0^3 = 0$$

$$y = f(x) = x^3 = 0 \rightarrow x = 0$$

Calcolo asintoti.

Si verifica se la funzione ha asintoti.

È presente un asintoto verticale se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

La funzione è continua, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione non ha asintoti verticali, in quanto $+\infty$ e $-\infty$ non appartengono a \mathbf{R} , per cui non può essere $f(x_0) = \pm\infty$.

È presente un asintoto orizzontale se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \quad l_1 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2 \quad l_2 \in \mathbf{R}$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali.

Si verifica se c'è un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1 \quad m_1 \in \mathbf{R} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2 \quad m_2 \in \mathbf{R}$$

In questo caso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Non c'è un asintoto obliquo. La funzione non ha asintoti.

Calcolo massimi e minimi.

Si verifica se la funzione ha punti di massimo o di minimo, verificando se la derivata prima si annulla in qualche punto e se per quei punti la derivata seconda è > 0 o < 0 :

$$f'(x_i) = 0$$

$$f''(x_i) > 0 \quad \text{oppure} \quad f''(x_i) < 0$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

La derivata prima si annulla nel punto $x = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$$

La derivata seconda, nel punto $x = 0$ in cui si annulla la derivata prima, è:

$$f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$$

In questo caso c'è una condizione di ambiguità, in quanto:

$$f'(0) = 0 \quad (\text{condizione di massimo o minimo})$$

$$f''(0) = 0 \quad (\text{condizione di flesso})$$

Calcolo dei punti di flesso.

In generale, al di là della condizione di ambiguità riscontrata, che andrà affrontata in modo specifico, si verifica se la funzione ha eventuali altri punti di flesso, verificando se la derivata seconda si annulla in altri punti $x \neq 0$:

$$f''(x) \neq 0, \quad \forall x \neq 0$$

Non ci sono altri punti che annullano la derivata seconda.

Per capire se $x_0 = 0$ è un punto di massimo/minimo o di flesso, occorre verificare la curvatura della funzione in un intorno del punto $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{l} f''(x) > 0, \quad x > x_0 \\ f''(x) > 0, \quad x < x_0 \end{array} \Rightarrow x_0 \text{ è un punto di minimo}$$

$$\begin{array}{l} f''(x) < 0, \quad x > x_0 \\ f''(x) < 0, \quad x < x_0 \end{array} \Rightarrow x_0 \text{ è un punto di massimo}$$

$$\begin{array}{l} f''(x) > 0, \quad x > x_0 \\ f''(x) < 0, \quad x < x_0 \end{array} \Rightarrow x_0 \text{ è un punto di flesso}$$

$$\begin{array}{l} f''(x) < 0, \quad x > x_0 \\ f''(x) > 0, \quad x < x_0 \end{array} \Rightarrow x_0 \text{ è un punto di flesso}$$

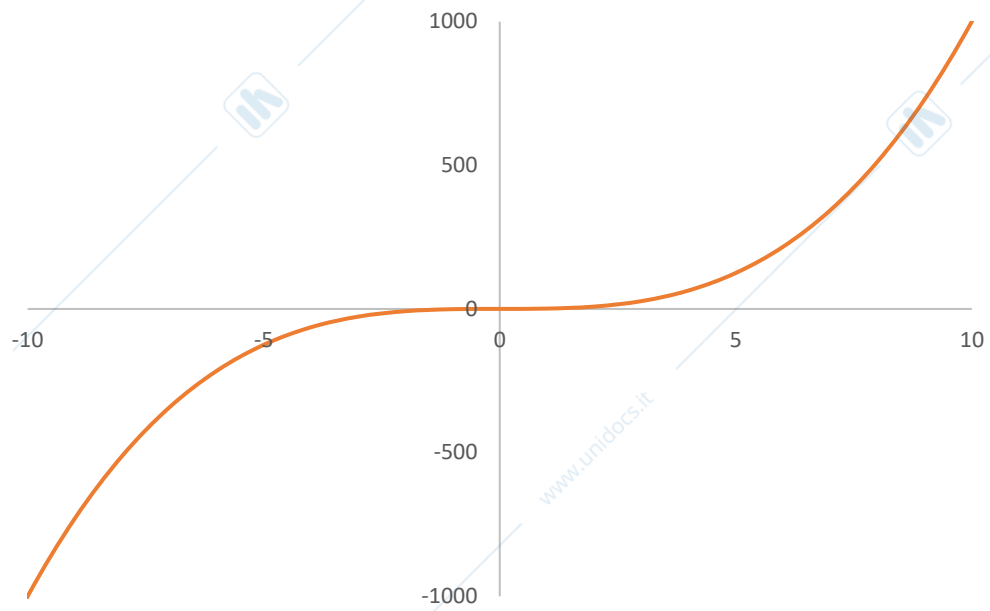
Nel caso in esame:

$$\begin{array}{l} f''(x) = 6x > 0, \quad x > 0 \\ f''(x) = 6x < 0, \quad x < 0 \end{array} \Rightarrow 0 \text{ è un punto di flesso}$$

Resta da calcolare il valore che assume la funzione nel punto di flesso:

$$f(0) = 0^3 = 0$$

Il grafico della funzione è:



Esercizio 30.

Si studi la funzione:

$$f(x) = x^4$$

Il dominio della funzione è \mathbf{R} :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Intersezione con gli assi.

Si verifica se la funzione interseca gli assi x , y :

$$x = 0 \rightarrow f(0) = ?$$

$$y = f(x) = 0 \rightarrow x = ?$$

Nel caso in esame, la funzione interseca gli assi in corrispondenza dell'origine:

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0^4 = 0$$

$$y = f(x) = x^4 = 0 \rightarrow x = 0$$

Calcolo asintoti.

Si verifica se la funzione ha asintoti.

È presente un asintoto verticale se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

La funzione è continua, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione non ha asintoti verticali, in quanto $+\infty$ e $-\infty$ non appartengono a \mathbf{R} , per cui non può essere $f(x_0) = \pm\infty$.

È presente un asintoto orizzontale se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \quad l_1 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2 \quad l_2 \in \mathbf{R}$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali.

Si verifica se c'è un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1 \quad m_1 \in \mathbf{R} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2 \quad m_2 \in \mathbf{R}$$

In questo caso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Non c'è un asintoto obliquo. La funzione non ha asintoti.

Calcolo massimi e minimi.

Si verifica se la funzione ha punti di massimo o di minimo, verificando se la derivata prima si annulla in qualche punto e se per quei punti la derivata seconda è > 0 o < 0 :

$$f'(x_i) = 0$$

$$f''(x_i) > 0 \quad \text{oppure} \quad f''(x_i) < 0$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

La derivata prima si annulla nel punto $x = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2$$

La derivata seconda, nel punto $x = 0$ in cui si annulla la derivata prima, è:

$$f''(0) = 12 \cdot 0 = 0$$

In questo caso c'è una condizione di ambiguità, in quanto:

$$f'(0) = 0 \quad (\text{condizione di massimo o minimo})$$

$$f''(0) = 0 \quad (\text{condizione di flesso})$$

Calcolo dei punti di flesso.

In generale, al di là della condizione di ambiguità riscontrata, che andrà affrontata in modo specifico, si verifica se la funzione ha eventuali altri punti di flesso, verificando se la derivata seconda si annulla in altri punti $x \neq 0$:

$$f''(x) \neq 0, \quad \forall x \neq 0$$

Non ci sono altri punti che annullano la derivata seconda.

Per capire se $x_0 = 0$ è un punto di massimo/minimo o di flesso, occorre verificare la curvatura della funzione in un intorno del punto $x_0 = 0$.

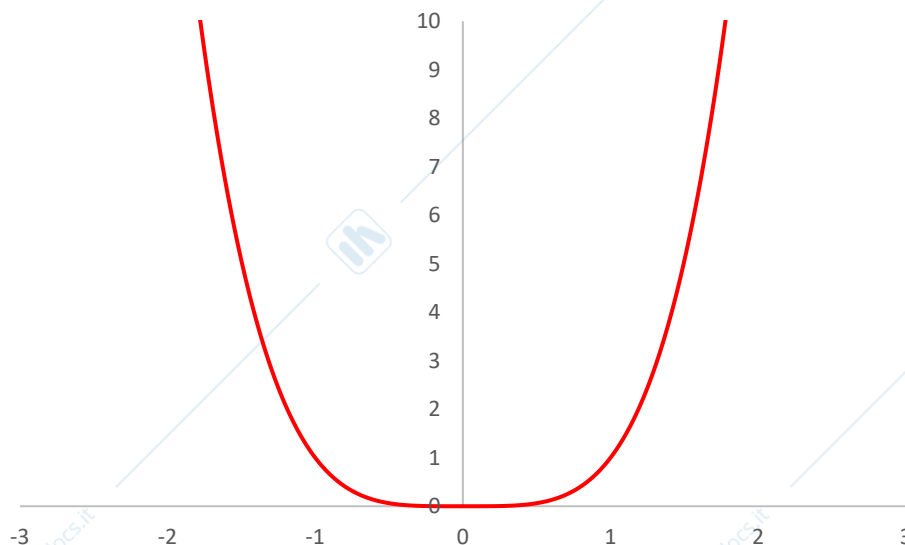
Nel caso in esame:

$$\begin{aligned} f''(x) = 12x^2 > 0, \quad x > 0 \\ f''(x) = 12x^2 > 0, \quad x < 0 \end{aligned} \Rightarrow 0 \text{ è un punto di minimo}$$

Il valore che assume la funzione nel punto di minimo è:

$$f(0) = 0^4 = 0$$

Il grafico della funzione è:



Osservazioni sulle funzioni degli esercizi 29 e 30.

In un caso generale di funzione:

$$f(x) = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad n \text{ pari o dispari}$$

Il comportamento della funzione in corrispondenza del punto $x_0 = 0$ è simile a quanto visto: per n dispari 0 è un punto di flesso, per n pari 0 è un punto di minimo.

Infatti, per un esponente dispari:

$$f(x) = x^{2n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{2n+1}) = (2n+1)x^{2n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}((2n+1)x^{2n}) = 2n \cdot (2n+1)x^{2n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f'(0) = 0 \quad \text{(condizione di massimo o minimo)}$$

$$f''(0) = 0 \quad \text{(condizione di flesso)}$$

Per capire se $x_0 = 0$ è un punto di massimo/minimo o di flesso, occorre verificare la curvatura della funzione in un intorno del punto $x_0 = 0$. Nel caso in esame:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2n \cdot (2n+1)x^{2n-1} > 0, & x > 0 \\ f''(x) &= 2n \cdot (2n+1)x^{2n-1} < 0 & x < 0 \end{aligned} \quad , n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0 \text{ è un punto di flesso}$$

Per un esponente pari:

$$f(x) = x^{2n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{2n}) = 2n \cdot x^{2n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(2n \cdot x^{2n-1}) = 2n \cdot (2n-1)x^{2n-2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f'(0) = 0 \quad \text{(condizione di massimo o minimo)}$$

$$f''(0) = 0 \quad \text{(condizione di flesso)}$$

Per capire se $x_0 = 0$ è un punto di massimo/minimo o di flesso, occorre verificare la curvatura della funzione in un intorno del punto $x_0 = 0$. Nel caso in esame:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2n \cdot (2n-1)x^{2n-2} > 0, & x > 0 \\ f''(x) &= 2n \cdot (2n-1)x^{2n-2} > 0 & x < 0 \end{aligned} \quad , n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0 \text{ è un punto di minimo}$$

Esercizio 31.

Si studi la funzione:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$$

Il dominio della funzione è \mathbf{R} :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Intersezione con gli assi.

Si verifica se la funzione interseca gli assi x , y :

$$x = 0 \rightarrow f(0) = ?$$

$$y = f(x) = 0 \rightarrow x = ?$$

Intersezione con l'asse y :

$$x = 0 \rightarrow \frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} = 0 \rightarrow y = 0$$

Per $x = 0$, la funzione si annulla.

Intersezione con l'asse x :

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} = 0 \rightarrow x^3 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right) = 0$$

Oltre che per $x = 0$, la funzione si annulla per:

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

La funzione interseca entrambi gli assi in corrispondenza dell'origine $(0,0)$ e l'asse x per $x = \frac{4}{3}$.

Calcolo asintoti.

Si verifica se c'è un asintoto verticale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

La funzione è continua, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione non ha asintoti verticali, in quanto $+\infty$ e $-\infty$ non appartengono a \mathbf{R} , per cui non può essere $f(x_0) = \pm\infty$.

Si verifica se c'è un asintoto orizzontale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \quad l_1 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2 \quad l_2 \in \mathbf{R}$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali.

Si verifica se c'è un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1 \quad m_1 \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2 \quad m_2 \in \mathbf{R}$$

In questo caso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

Non c'è un asintoto obliquo. La funzione non ha asintoti.

Calcolo massimi e minimi.

Si verifica se la funzione ha punti di massimo o di minimo, verificando se la derivata prima si annulla in qualche punto e se per quei punti la derivata seconda è > 0 o < 0 :

$$f'(x_i) = 0$$

$$f''(x_i) > 0 \quad \text{oppure} \quad f''(x_i) < 0$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{4x^3}{4} - \frac{3x^2}{3} = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

La derivata prima si annulla nei punti:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

La derivata seconda, nei punti x in cui si annulla la derivata prima, vale:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} (x^3 - x^2) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(1) = 3 - 2 = 1 > 0 \quad (\text{punto di minimo})$$

$x = 0$ può essere un punto di flesso (da verificare, in quanto $f'(0) = f''(0) = 0$)
 $x = 1$ è un punto di minimo

Calcolo dei punti di flesso.

Si verifica dove la derivata seconda si annulla:

$$f''(x) = x(3x - 2) = 0$$

La derivata seconda si annulla nei punti:

$$x = 0 \quad (\text{eventuale punto di flesso da verificare})$$

$$3x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{3} \quad (\text{punto di flesso})$$

Vale:

$$\begin{array}{l} f''(x) = x(3x - 2) > 0, \quad x < 0 \\ f''(x) = x(3x - 2) < 0 \quad 0 < x < \frac{2}{3} \end{array} \Rightarrow \quad 0 \text{ è un punto di flesso } \left(\frac{2}{3} \text{ è l'altro flesso} \right)$$

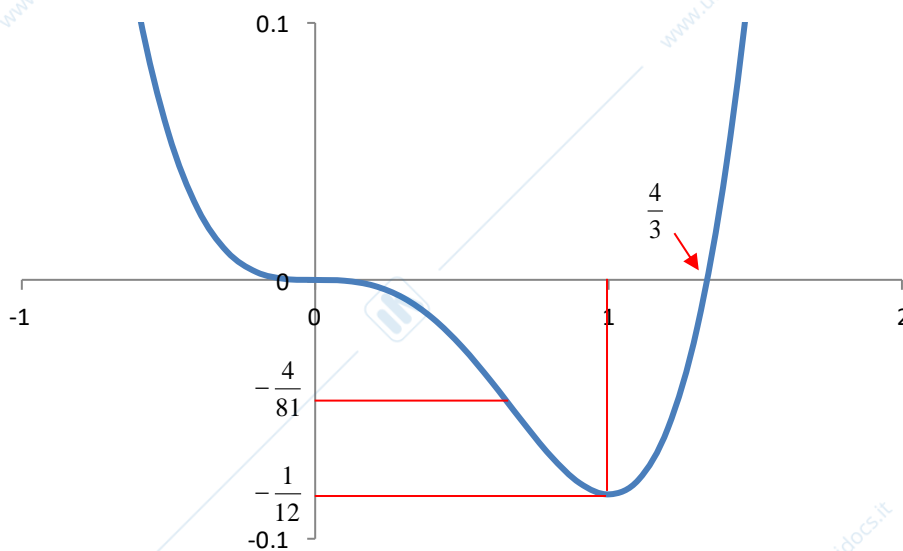
I valori della funzione in corrispondenza dei punti di minimo e di flesso sono:

$$f(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \quad (\text{punto di minimo})$$

$$f(0) = \frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} = 0 \quad (\text{punto di flesso})$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{4 \cdot 81} - \frac{8}{3 \cdot 27} = \frac{4}{81} - \frac{8}{81} = -\frac{4}{81} \quad (\text{punto di flesso})$$

Il grafico della funzione è:



Esercizio 32.

Si studi la funzione:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

Il dominio di definizione della funzione è:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

1° parte. Intersezione con gli assi.

Si verifica se la funzione interseca gli assi x , y :

$$x=0 \rightarrow f(0) = ?$$

$$y = f(x) = 0 \rightarrow x = ?$$

Nel caso in esame, la funzione non interseca l'asse y :

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \quad (f \text{ non è definita per } x = 0)$$

Si considera l'intersezione con l'asse x :

$$y = f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} = 0$$

Si ha:

$$y = f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$$

La curva della funzione interseca l'asse x nel punto $x = 1$.

2° parte. Calcolo asintoti.

Si verifica se la funzione ha asintoti.

Per la funzione in esame, è presente un asintoto verticale se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2} = \pm\infty$$

In particolare, il denominatore tende sempre a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Il segno è determinato dal denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$$

C'è un asintoto verticale per $x = 0$ e la funzione presenta due rami infiniti nel semipiano $y < 0$ rispetto all'asse x .

È presente un asintoto orizzontale se:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} = l_1 \quad l_1 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = l_2 \quad l_2 \in \mathbf{R}$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty} \quad (\text{forma indeterminata})$$

Si può utilizzare la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{d}{dx}(x-1)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx}(x-1)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

C'è un asintoto orizzontale per $y = 0$ e la funzione presenta due rami infiniti, uno per ogni semipiano ($x > 0$, $x < 0$) rispetto all'asse y : per $x < 0$ la funzione tende all'asintoto da valori negativi, per $x > 0$ la funzione tende all'asintoto da valori positivi.

3° parte. Calcolo massimi e minimi.

Si verifica se la funzione ha punti di massimo o di minimo, verificando se la derivata prima si annulla in qualche punto e se per quei punti la derivata seconda è > 0 o < 0 :

$$f'(x_i) = 0$$

$$f''(x_i) > 0 \quad \text{oppure} \quad f''(x_i) < 0$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x^2} \right) = \frac{1 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x \cdot (2-x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2-x}{x^3}$$

La derivata prima si annulla quando si annulla il numeratore:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-x=0 \quad \rightarrow \quad x=2$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} (f'(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2-x}{x^3} \right) = \frac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{x^6} =$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

La derivata seconda, nel punto $x=2$ in cui si annulla la derivata prima, è:

$$f''(2) = \frac{2(2-3)}{2^4} < 0 \quad (\text{punto di max})$$

$x=2$ è un punto di massimo

4° parte. Calcolo dei punti di flesso.

Si verifica se la funzione ha punti di flesso, verificando se la derivata seconda si annulla:

$$f''(x) = \frac{2(x-3)}{x^4} = 0$$

La derivata seconda si annulla quando si annulla il numeratore:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=3$$

$x = 3$ è un punto di flesso.

Restano da calcolare i valori che assume la funzione nei punti di massimo e di flesso:

$$f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad (2 \text{ è un p.to di max})$$

$$f(3) = \frac{3-1}{3^2} = \frac{2}{9} \quad (3 \text{ è un p.to di flesso})$$

Il grafico della funzione è (ricordando gli asintoti e l'intersezione con l'asse x):

