

**LIMITE DI UNA FUNZIONE.**

Utilizzando le nozioni di *intorno* e di *punti di accumulazione*, si definisce il limite di una funzione.

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, A \subseteq \mathbf{R}$$

$$x_0 \in D(A)$$

( $x_0$  punto di accumulazione di  $A$ )

Si definisce:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda, \lambda \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

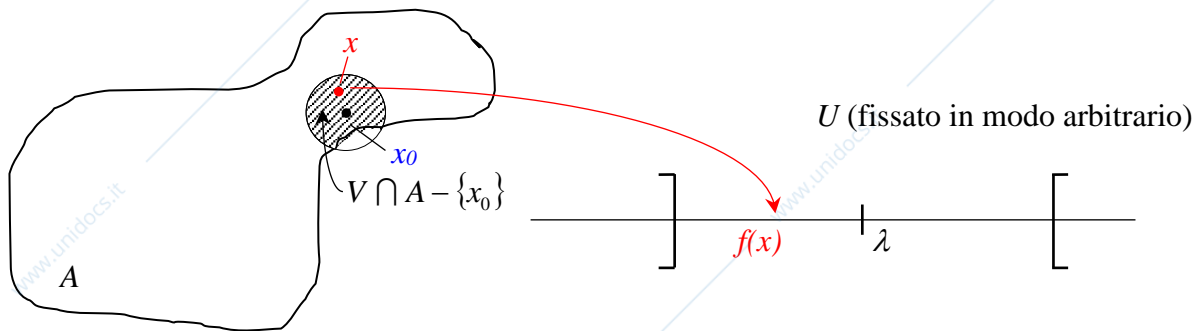
$$\forall U = S(\lambda, \varepsilon) \quad \exists V = S(x_0, \delta): \quad x \in V \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

Per ogni intorno  $U$  di  $\lambda$  esiste un intorno  $V$  di  $x_0$  tale che, se un punto  $x$  appartiene all'intersezione di  $V$  con  $A$  (senza il punto  $x_0$ ), allora  $f(x)$  appartiene a  $U$ .

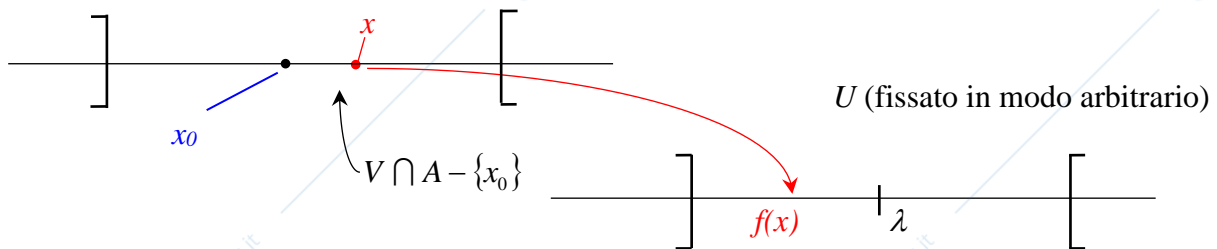
Se fosse:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, A \subseteq \mathbf{R}^2$$

la definizione precedente potrebbe essere vista graficamente:



Nel caso di  $A \subseteq \mathbf{R}$ , la definizione di limite può essere vista graficamente:



**Limite per una funzione (forma alternativa di scrittura).**

Sia:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lambda \in \mathbf{R}, \quad x_0 \in \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(A), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

La definizione di limite era:

$$\forall U = S(\lambda, \varepsilon) \quad \exists V = S(x_0, \delta): \quad x \in V \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

Considerando che un punto  $f(x)$  appartiene all'intorno  $U$  di  $\lambda$  se:

$$U = ]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$$

$$f(x) \in U \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Analogamente, un punto  $x$  appartiene all'intorno  $V$  di  $x_0$  se:

$$V = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$x \in V \quad \Leftrightarrow \quad |x - x_0| < \delta$$

La definizione di limite diventa:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Si legge: per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\delta > 0$  ( $\delta$  dipende da  $\varepsilon$ ) tale che, se un punto  $x$  appartiene all'insieme  $A$  (escluso il punto  $x_0$ ) ed il valore assoluto della differenza fra  $x$  e  $x_0$  è minore di  $\delta$ , allora il valore assoluto della differenza fra  $f(x)$  e  $\lambda$  è minore di  $\varepsilon$ .

**Funzioni continue.**

Sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, \quad f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad x_0 \in A, \quad x_0 \in D(A)$$

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che la funzione  $f$  è continua in  $A$  (e si indica con  $f \in C_A$ ) se:

$$f \in C_A \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è continua in ogni punto di } A.$$

**Definizione di limite per valori particolari.**

La definizione di limite:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(A)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Se  $x_0$  o  $\lambda$  assumono valori  $+\infty$  o  $-\infty$ , la definizione di limite non può assumere la forma precedente, in cui compaiono  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$  e  $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$ .

Nel caso di limiti che assumono valori  $\lambda$  pari a  $+\infty$  o  $-\infty$ , la definizione di limite assume la forma:

Per  $\lambda = +\infty$ :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists \delta(M) > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(M) \quad \Rightarrow f(x) > M$$

Per  $\lambda = -\infty$

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists \delta(M) > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(M) \quad \Rightarrow f(x) < M$$

Nel caso di limiti in cui i valori di  $x$  tendono a  $+\infty$  o  $-\infty$ , la definizione di limite assume la forma:

Per  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M(\varepsilon) \in \mathbf{R}: \quad x \in A - \{x_0\}, x > M(\varepsilon) \quad \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Per  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M(\varepsilon) \in \mathbf{R}: \quad x \in A - \{x_0\}, x < M(\varepsilon) \quad \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

In generale, data la funzione:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(A)$$

La scrittura:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

Può essere scritta come (sono due forme equivalenti):

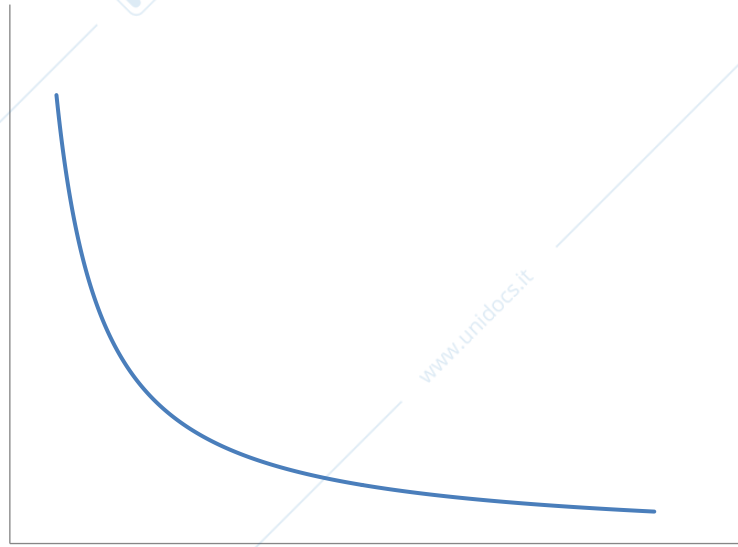
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda$$

**ESEMPI APPLICATIVI**

Sia:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R}; x > 0\} = ]0, +\infty[$$

Graficamente:

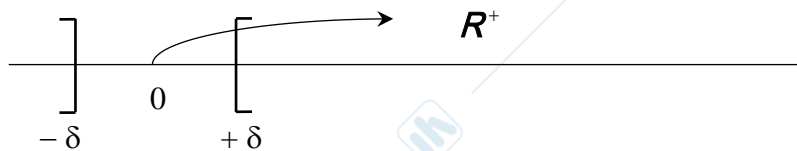
**I caso.**

Si considera:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Perché abbia senso, deve essere:

$$0 \in D(\mathbf{R}^+)$$

Si considera un intorno centrato nello 0 e di raggio  $\delta$  arbitrario.

Vale:

$$]-\delta, +\delta[ \cap \mathbf{R}^+ = ]0, \delta[ \quad \text{l'intervallo è infinito}$$

Quindi:

$$0 \in D(\mathbf{R}^+) \quad 0 \text{ è un punto di accumulazione}$$

La definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

in questo caso ( $f \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ ) diventa:

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists \delta(M) > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(M) \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$

La funzione è definita per  $\mathbf{R}^+$  e  $x_0 = 0$ , per cui in questo caso la definizione di limite assume la forma:

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta(M) > 0: \quad x \in \mathbf{R}^+, |x| < \delta(M) \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$

Vale:

$$f(x) > M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} > M \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{M}$$

Considerando che:

$$|x| = x \quad (\text{la funzione è definita per } x > 0)$$

e assumendo:

$$\delta(M) = \frac{1}{M}$$

Si ha:

$$x < \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad x < \delta(M) \quad \Rightarrow \quad |x| < \delta(M)$$

Il limite esiste ed è  $+\infty$ .

**II caso.**

Si considera:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad x \in A - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

in questo caso, vista la funzione e visto che  $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , diventa:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M(\varepsilon) \in \mathbf{R}: \quad x \in A - \{x_0\}, x > M(\varepsilon) \quad \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

La funzione è definita per  $\mathbf{R}^+$  e il limite è  $\lambda = 0$ , per cui la definizione di limite assume la forma:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M(\varepsilon) \in \mathbf{R}^+: \quad x \in \mathbf{R}^+, x > M(\varepsilon) \quad \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Inoltre:

$$|f(x)| = f(x) \quad (\text{la funzione è definita per } x > 0)$$

Vale:

$$f(x) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Assumendo:

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$$

Si ha:

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x > M(\varepsilon)$$

Il limite esiste ed è  $= 0$ .

### Calcolo di limiti di funzione.

In generale, se si conoscesse o si ipotizzasse di conoscere il valore del limite di una funzione, occorrerebbe dimostrarne la correttezza in base alla definizione di limite così come è stato fatto in precedenza per alcuni casi.

A titolo di esempio, data la funzione:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x, \quad x_0 \in \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(\mathbf{R})$$

la funzione è definita su tutto  $\mathbf{R}$ , per cui ogni punto  $x_0 \in \mathbf{R}$  è un punto di accumulazione.

Un generico limite per  $x \rightarrow x_0$  vale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

Occorrerebbe dimostrarlo dalla definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad x \in \mathbf{R} - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

In questo caso, si ha:

$$f(x) = x, \quad \lambda = x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \lambda| = |x - x_0| < \varepsilon$$

Per cui si può assumere:

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

Il limite esiste ed è  $= x_0$  e la funzione  $f$  è continua in  $x_0$  (è continua su tutto  $\mathbf{R}$ ).

Normalmente, non si conosce il valore di un limite di cui se ne possa dimostrare la correttezza in base alla definizione di limite così come è stato fatto in precedenza.

Operativamente, si può calcolare il limite lavorando sull'espressione della funzione e cercando di esprimerla in termini di funzioni più semplici di cui si conosce già il limite.

In questo senso, verranno considerati noti alcuni limiti, che potranno essere utilizzati in caso di funzioni più complesse.

Per esempio, sia:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x_0 \in \mathbf{R}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$x_0$  è un punto di accumulazione ed  $f$  è continua in  $x_0$  (è continua su tutto  $\mathbf{R}$ ).

**Proprietà dei limiti.**

Unicità del limite per una funzione.

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(A)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mu \quad \Rightarrow \lambda = \mu$$

Il limite di una funzione per  $x \rightarrow x_0$ , se esiste, è unico.

Come visto in precedenza, scrivere che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

equivale a scrivere:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda$$

Sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(A), \quad f, g: A \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Valgono le proprietà:

$$\text{i)} \quad f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha + \beta$$

$$\text{ii)} \quad f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot \beta$$

$$\text{iii)} \quad f(x) \neq 0, \forall x \in A, \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{iv)} \quad f(x) \leq g(x), \forall x \in A \quad \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

$$\text{v)} \quad h: A \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in A, \quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha = \beta$$

$$\text{vi)} \quad |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} |\alpha|$$

**Definizione di limite per  $x$  che tende a  $x_0$  “da destra” o “da sinistra”.**

Sia:

$$A \subseteq \mathbf{R}, \quad x_0 \in D(A)$$

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}$$

Si definisce “limite per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra”:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Si definisce “limite per  $x$  che tende a  $x_0$  da sinistra”:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

Il *limite da destra* è uguale al *limite da sinistra*, se e solo se la funzione ha limite.

**Esempio applicativo.**

Sia:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione al numeratore, in questo caso  $\mathbf{R}$ , – i valori in cui si annulla il denominatore:

$$x = 0$$

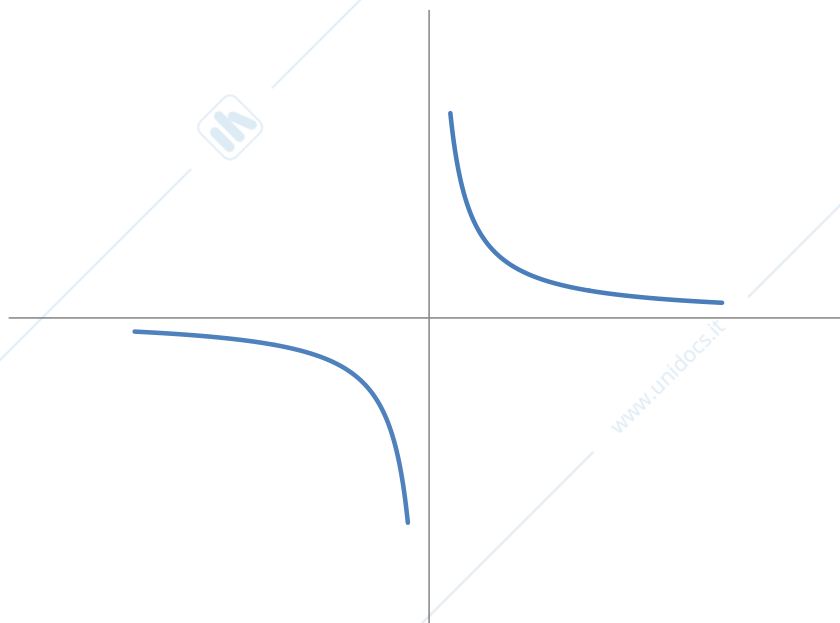
La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Una forma alternativa di scrittura del dominio può essere:

$$f : ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$$

Graficamente:



Si calcolano i limiti per  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow 0^-$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad (\text{come visto in precedenza})$$

Per  $x \rightarrow 0^-$  si potrebbe calcolare in modo analogo il limite (utilizzando la definizione di limite), oppure si possono fare alcune considerazioni utilizzando le proprietà dei limiti:

$$f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot \beta \quad (\text{il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti})$$

Questo è vero anche considerando la funzione  $g(x)$  come una costante  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( a \cdot \frac{1}{x} \right) = a \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \quad (\text{il limite di una costante è il valore della costante})$$

il limite del prodotto di una costante per la funzione  $f(x)$  è uguale al prodotto della costante per il limite della funzione.

Considerando  $a = -1$ , si ha:

$$\frac{1}{x} = (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x}$$

in particolare:

$$(-1) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \quad (x < 0) \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

Il limite diventa per  $x > 0$ , per cui, moltiplicando per  $-1$  il limite della funzione, si ottiene:

$$-1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -1 \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Da cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x} \right] = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ (-1) \cdot \frac{1}{x} \right] = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

In questo caso:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$$

per cui:

$$\text{NON ESISTE} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$