

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE LOGARITMO.

Per la funzione logaritmo valgono le seguenti proprietà.

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad , b, c, a \in \mathbf{R}^+$$

$$\text{i) } \lg_a(b \cdot c) = \lg_a b + \lg_a c \quad b, c \in \mathbf{R}^+$$

$$\text{ii) } \lg_a b^\alpha = \alpha \lg_a b \quad b \in \mathbf{R}^+, \alpha \in \mathbf{R}$$

Per la prima proprietà deve valere:

$$\lg_a(b \cdot c) = \lg_a b + \lg_a c$$

Si considerano entrambi i membri dell'equazione come argomento della funzione esponenziale in base a :

$$a^{\lg_a(b \cdot c)} = a^{\lg_a b + \lg_a c} = a^{\lg_a b} \cdot a^{\lg_a c}$$

La funzione esponenziale è la funzione inversa del logaritmo (entrambi in base a), per cui:

$$(b \cdot c) = (b) \cdot (c) \quad \text{la prima proprietà è verificata.}$$

Per la seconda proprietà deve valere:

$$\lg_a b^\alpha = \alpha \lg_a b$$

Come prima, si applica la funzione inversa della funzione logaritmo e si considerano entrambi i membri dell'equazione come argomento della funzione esponenziale in base a :

$$a^{\lg_a b^\alpha} = a^{\alpha \lg_a b} = (a^{\lg_a b})^\alpha$$

Si ha:

$$b^\alpha = (b)^\alpha \quad \text{la seconda proprietà è verificata.}$$

Logaritmi naturali e logaritmi in base 10.

Numero di Nepero.

Il numero di Nepero “e” è definito come limite della successione:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Dove:

$$e = 2.718281$$

Si definisce *logaritmo naturale* la funzione (la base è costituita dal numero di Nepero):

$$y = f(x) = \lg x \equiv \log x \equiv \ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

Si definisce *logaritmo in base 10 o decimale (o di Briggs)* la funzione (la base è costituita dal numero 10):

$$y = f(x) = \lg_{10} x \equiv \log_{10} x \equiv \text{Log} x \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x$$

Passaggio da un sistema di logaritmi all'altro.

$$e^y = x, \quad y = \lg x$$

Si considerano entrambi i membri dell'equazione come argomento della funzione \lg_{10} :

$$\lg_{10} e^y = \lg_{10} x$$

Si ha:

$$\lg_{10} e^y = y \cdot \lg_{10} e = \lg x \cdot \lg_{10} e$$

Per cui:

$$\lg_{10} x = (\lg_{10} e) \cdot \lg x$$

dove il fattore di conversione è: $\lg_{10} e = 0.43429$

$$\lg x = (\lg_{10} e)^{-1} \cdot \lg_{10} x$$

dove il fattore di conversione è: $(\lg_{10} e)^{-1} = 2.30259$

ESERCIZIO.

Sia:

$$f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x} \equiv \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

Il dominio di definizione della funzione è dato dall'intersezione dei domini delle funzioni al numeratore ed al denominatore, meno i punti in cui si annulla il denominatore.

Sia al numeratore che al denominatore è presente la funzione logaritmo, definita da:

$$\log: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

Dal dominio di definizione della funzione devono essere tolti i punti in cui si annulla il denominatore:

$$1 + \log x = 0 \quad \Rightarrow \quad \log x = -1$$

Per risolvere l'equazione si utilizza la funzione inversa:

$$e^{\log x} = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1}$$

Dal dominio di definizione della funzione $\log x$ viene tolto il punto $\{e^{-1}\}$, per cui la funzione è definita da:

$$f: \mathbf{R}^+ - \{e^{-1}\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Si devono calcolare i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

limite per $x \rightarrow (e^{-1})^+$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

limite per $x \rightarrow (e^{-1})^-$

Si considerano i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

Entrambi i limiti presentano una forma indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log x + 1} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log x + 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Si può scrivere:

$$\frac{\log x}{\log x + 1} = \frac{\log x}{\log x \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\log x}}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Si considerano i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

limite per $x \rightarrow (e^{-1})^+$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \frac{\log x}{\log x + 1}$$

limite per $x \rightarrow (e^{-1})^-$

In particolare:

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} \log x = -1, \quad \text{per } x > e^{-1}: \quad \log x > -1 \quad \rightarrow \quad \log x + 1 > 0$$

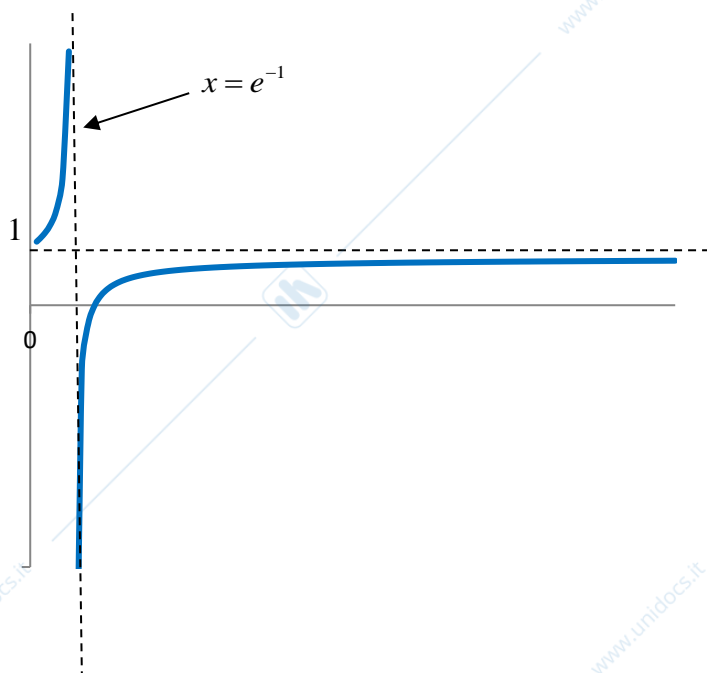
$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \log x = -1, \quad \text{per } x < e^{-1}: \quad \log x < -1 \quad \rightarrow \quad \log x + 1 < 0$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} \frac{\log x}{\log x + 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (\text{il denominatore tende a } 0 \text{ per valori positivi della differenza})$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \frac{\log x}{\log x + 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (\text{il denominatore tende a } 0 \text{ per valori negativi della differenza})$$

La rappresentazione grafica della funzione è:



ESERCIZIO.

Sia:

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$$

Il dominio della funzione al numeratore è determinato dalla condizione che l'argomento della funzione logaritmo sia > 0 :

$$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D:]-1, +\infty[$$

Da questo vanno esclusi i valori che annullano il denominatore ($x \neq 0$).

La funzione è così definita da:

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A =]-1, 0[\cup]0, +\infty[=]-1, 0[\cup \mathbf{R}^+$$

Si vuole calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x}$$

il limite appare nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per $x \rightarrow 0^-$ e $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = \frac{\log(0+1)}{0} = \frac{0}{0}$$

Considerando una delle proprietà dei logaritmi, si ha:

$$\frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \log(x+1) = \log \left[(x+1)^{\frac{1}{x}} \right]$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{z}$$

Per cui, quando:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow \pm\infty$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left[(x+1)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{z \rightarrow +\infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right]$$

Dove, ricordando la definizione del numero di Nepero:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

e:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \right] = \log e = 1$$

per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

ESERCIZIO.

Sia:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Il dominio del numeratore è \mathbf{R} , per cui la funzione è definita da:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Si vuole calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

il limite appare nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per $x \rightarrow 0^-$ e $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = e^x - 1 \quad \Rightarrow \quad e^x = z + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \log e^x = \log(z + 1)$$

per cui, quando:

$$x \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad z \rightarrow 0$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\log(z + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log(z + 1)}{z}} = 1$$

Come visto nell'esercizio precedente:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(z + 1)}{z} = 1$$

Vale quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

FUNZIONE POTENZA

Si è visto in precedenza che, data la funzione:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x_0 \in \mathbf{R}$$

vale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

x_0 è un punto di accumulazione ed f è continua in x_0 (è continua su tutto \mathbf{R}).

Si definisce la funzione potenza, in modo del tutto generale, considerando la base come variabile e l'esponente costante come una variabile reale:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^a, \quad a \in \mathbf{R}$$

Il dominio di definizione è \mathbf{R}^+ , in quanto, essendo l'esponente un numero reale, i casi per esempio di radice pari di un numero negativo non possono essere definiti.

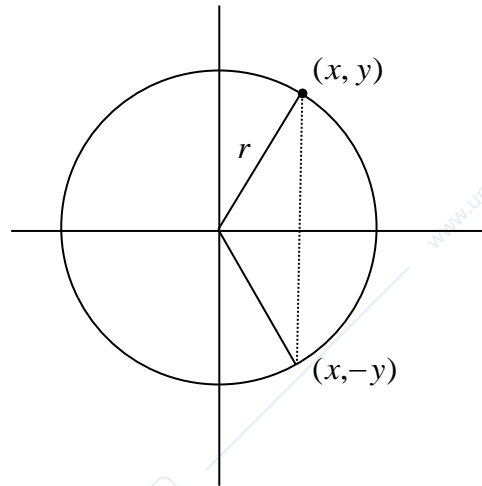
Se si considerasse $x = 0$ e fosse $a = 0$, la funzione ricadrebbe nel caso 0^0 .

FUNZIONI CIRCOLARI.

Dalla definizione di funzione, le condizioni perché $f : A \rightarrow B$ sia una funzione sono:

- i) $f \subseteq A \times B$
- ii) $\forall a \in A, \exists! b \in B : b = f(a)$

Nel caso di una circonferenza rappresentata in un sistema di coordinate cartesiane:



L'equazione che rappresenta un generico punto su una circonferenza:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (r = \text{raggio della circonferenza})$$

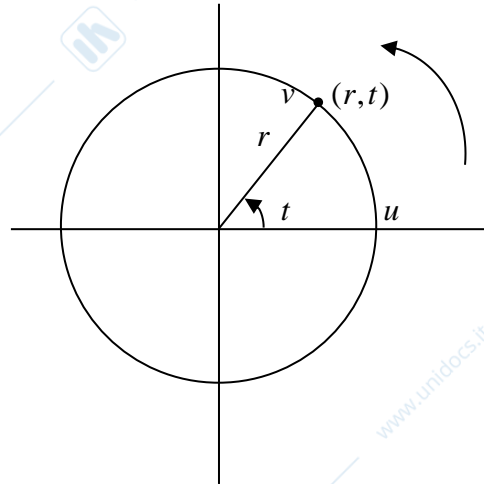
non può essere vista come una funzione. Infatti, l'equazione:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = r^2 - x^2$$

ammette due soluzioni:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Però, se si considera di identificare un punto sulla circonferenza non in base alle sue coordinate cartesiane, ma in funzione del raggio della circonferenza e dell'angolo che rappresenta l'ampiezza dell'arco corrispondente al punto che si sta considerando, dando alla circonferenza un orientamento antiorario:



ad ogni valore di un angolo corrisponde un solo punto sulla circonferenza.

Per la misura di un angolo sono stati definiti diversi sistemi di unità di misura. In particolare, si definisce **angolo**, misurato in radianti (in senso antiorario), la lunghezza di un arco su una circonferenza di raggio unitario:

$$t = l(\widehat{uv})$$

La lunghezza dell'arco corrispondente alla circonferenza unitaria è 2π .

Un angolo, misurato in radianti, apparterrà all'intervallo:

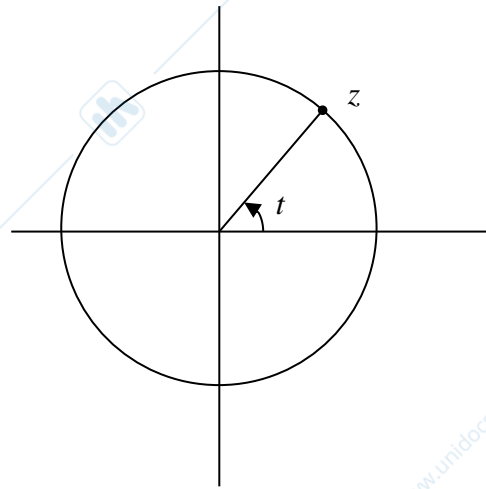
$$t \in [0, 2\pi[$$

Dato un generico numero reale, vale che:

$$t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \exists! k \in \mathbf{I}, \tau \in [0, 2\pi[: \quad t = \tau + 2k\pi$$

DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI SENO E COSENO.

Si considera la circonferenza unitaria:



Come visto in precedenza:

$$t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \exists! k \in \mathbf{I}, \tau \in [0, 2\pi[: \quad t = \tau + 2k\pi$$

Si pone per definizione:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (\text{la funzione } \textit{seno} \text{ si indica con } \textit{sen} \text{ oppure } \textit{sin})$$

Si definiscono:

$$\cos t = \cos(\tau + 2k\pi) = \cos \tau$$

$$\sin t = \sin(\tau + 2k\pi) = \sin \tau$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sin 0 = 0 \quad , \quad \cos 0 = 1$$

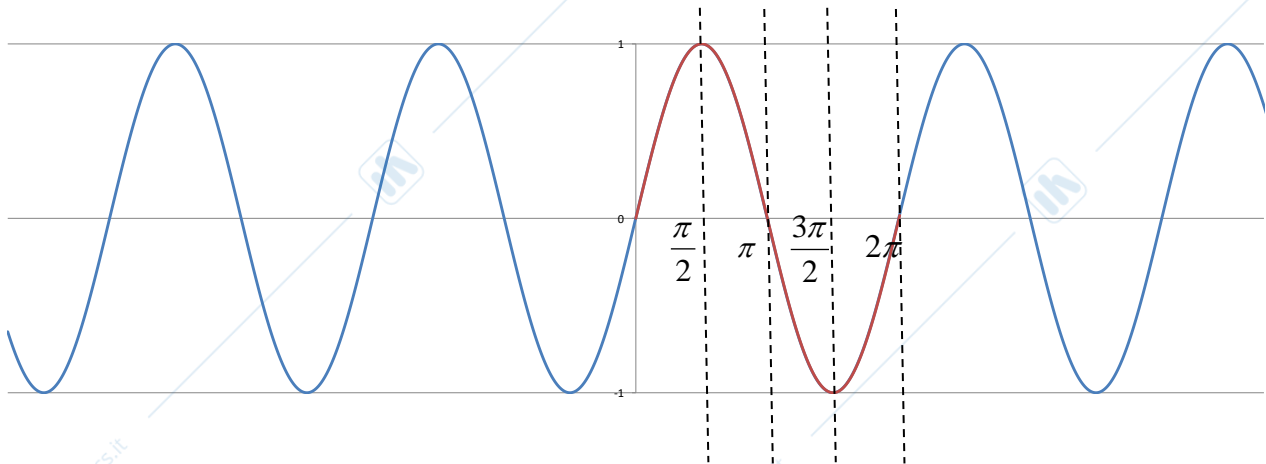
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \pi = 0 \quad , \quad \cos \pi = -1$$

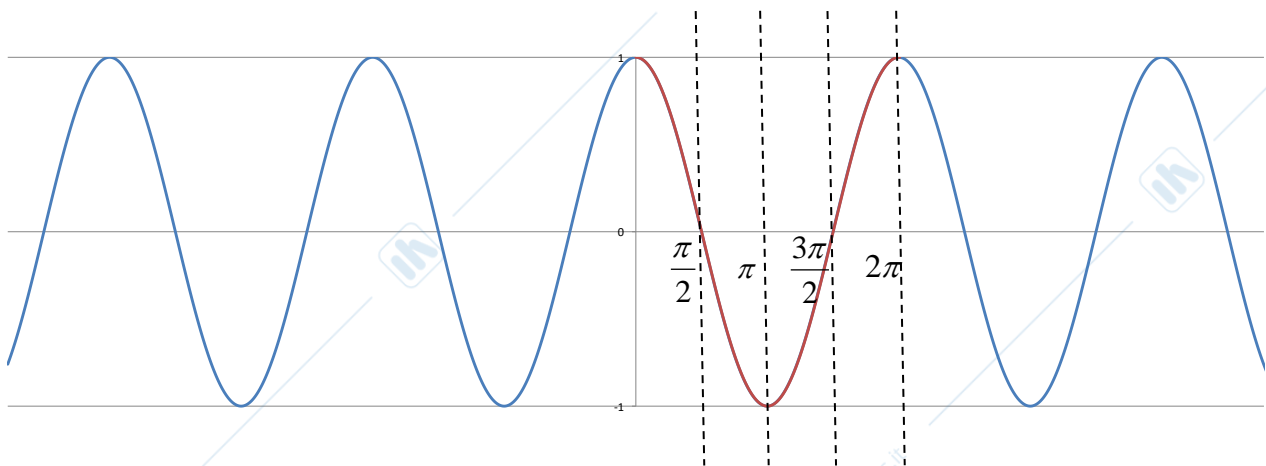
$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1 \quad , \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi = 0 \quad , \quad \cos 2\pi = 1$$

Il grafico della funzione *seno* è:



Il grafico della funzione *coseno* è:



DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI TANGENTE E COTANGENTE.

Si definisce:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

(la funzione *tangente* può essere indicata con *tan* oppure *tg*)

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

(la funzione *cotangente* può essere indicata con *cot* oppure *cotg*)

In generale, per la funzione *seno* vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin t = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \sin t = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin t = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow 2\pi} \sin t = \sin 2\pi = 0$$

Per la funzione *coseno* vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos t = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \cos t = \cos \pi = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \cos t = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 2\pi} \cos t = \cos 2\pi = 1$$

Le funzioni *seno* e *coseno* sono funzioni continue.

Se si calcolano i limiti precedenti per le funzioni *tangente* e *cotangente* si può vedere che queste non sono funzioni continue.

Funzione tangente.

Per la funzione *tangente* si vogliono calcolare i limiti:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan t = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \tan t = \lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t}$$

Per quanto visto prima:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos t = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \cos t = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

In generale:

$$\lim_{t \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} \cos t = \lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} \cos t = 0, \quad k \in \mathbb{I}$$

Per cui, visto che la funzione *coseno* è al denominatore, la funzione *tangente* presenta delle discontinuità per:

$$t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{I}$$

Occorre verificare se, in corrispondenza di questi punti, la funzione ha limite oppure no, cioè se:

$$\lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi^+} \tan t = \lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi^-} \tan t = \lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} \tan t$$

Si possono considerare i valori $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3}{2}\pi$.

Per $t = \frac{\pi}{2}$ la funzione *seno* al numeratore ha limite:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin t = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Per la funzione *coseno*:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos t = 0, \quad \text{per } t > \frac{\pi}{2}: \cos t < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos t = 0, \quad \text{per } t < \frac{\pi}{2}: \cos t > 0$$

Per cui (il numeratore è positivo):

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan t = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (\text{il denominatore tende a 0 per valori negativi})$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan t = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (\text{il denominatore tende a 0 per valori positivi})$$

Per $t = \frac{3\pi}{2}$ la funzione *seno* al numeratore ha limite:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin t = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

Per la funzione *coseno*:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \cos t = 0, \quad \text{per } t > \frac{3\pi}{2}: \cos t > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \cos t = 0, \quad \text{per } t < \frac{3\pi}{2}: \cos t < 0$$

Per cui (il numeratore è negativo):

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \tan t = \lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (\text{il denominatore tende a 0 per valori positivi})$$

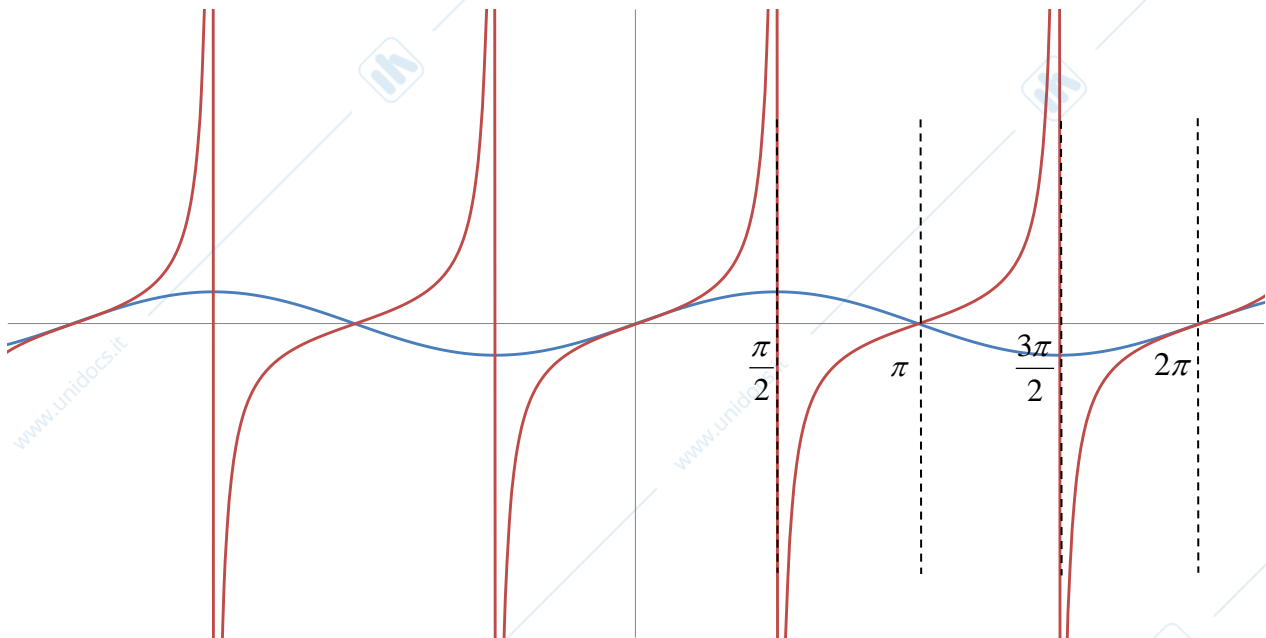
$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \tan t = \lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (\text{il denominatore tende a 0 per valori negativi})$$

Quindi, per i valori $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$, la funzione *tangente* non ha limite.

Questo comportamento si ripete in modo periodico per:

$$t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{I}$$

Graficamente (in rosso è rappresentata la funzione *tangente*, in azzurro la funzione *seno*):



Funzione cotangente.

Per la funzione *cotangente* si vogliono calcolare i limiti:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cot t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \lim_{t \rightarrow \pi} \cot t = \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\cos t}{\sin t}$$

Vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = \sin 0 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \pi} \sin t = \sin \pi = 0$$

In generale:

$$\lim_{t \rightarrow k\pi} \sin t = 0, \quad k \in \mathbb{I}$$

Per cui, visto che la funzione *seno* è al denominatore, la funzione *cotangente* presenta delle discontinuità per:

$$t \rightarrow k\pi, \quad k \in \mathbb{I}$$

Occorre verificare se, in corrispondenza di questi punti, la funzione ha limite oppure no, cioè se:

$$\lim_{t \rightarrow k\pi^+} \cot t = \lim_{t \rightarrow k\pi^-} \cot t = \lim_{t \rightarrow k\pi} \cot t$$

Si possono considerare i valori $t = 0$ e $t = \pi$.

Per $t = 0$ la funzione *coseno* al numeratore ha limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = \cos 0 = 1$$

Per la funzione *seno*:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sin t = 0, \quad \text{per } t > 0: \quad \sin t > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \sin t = 0, \quad \text{per } t < 0: \quad \sin t < 0$$

Per cui (il numeratore è positivo):

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \cot t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (\text{il denominatore tende a } 0 \text{ per valori positivi})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \cot t = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (\text{il denominatore tende a } 0 \text{ per valori negativi})$$

Per $t = \pi$ la funzione *coseno* al numeratore ha limite:

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \cos t = \cos 0 = -1$$

Per la funzione *seno*:

$$\lim_{t \rightarrow \pi^+} \sin t = 0, \quad \text{per } t > \pi : \quad \sin t < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} \sin t = 0, \quad \text{per } t < \pi : \quad \sin t > 0$$

Per cui (il numeratore è negativo):

$$\lim_{t \rightarrow \pi^+} \cot t = \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (\text{il denominatore tende a } 0 \text{ per valori negativi})$$

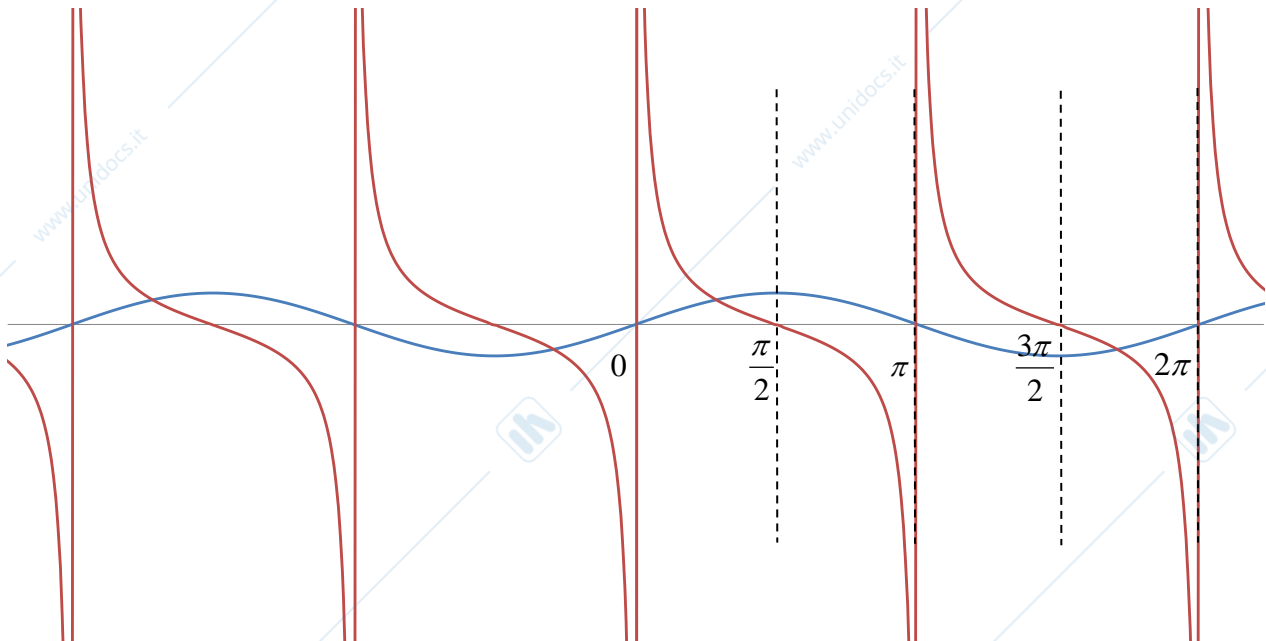
$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} \cot t = \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (\text{il denominatore tende a } 0 \text{ per valori positivi})$$

Quindi, per i valori $t = 0$ e $t = \pi$, la funzione *cotangente* non ha limite.

Questo comportamento si ripete in modo periodico per:

$$t \rightarrow k\pi, \quad k \in \mathbb{I}$$

Graficamente (in rosso è rappresentata la funzione *cotangente*, in azzurro la funzione *seno*):



ESERCIZIO.

Sia:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

I domini di definizione della funzione $\sin x$ al numeratore e $\sin x + 1$ al denominatore sono costituiti dall'insieme \mathbf{R} , da cui vengono tolti i valori in cui si annulla il denominatore:

$$\sin x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \sin x = -1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \equiv \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi; \quad k \in I$$

La funzione è definita da:

$$f : \mathbf{R} - \left\{ \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

In quanto, per i valori:

$$\left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi; k \in I \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$$

il denominatore = 0, e la funzione diverge.

In generale, per $k \in I$, vale:

$$\sin 0 = \sin \pi = \sin k\pi = 0$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi = 1$$

$$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi = -1$$

Si possono considerare i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi} \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi} \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin x}{\sin x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi} \frac{\sin x}{\sin x + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Per il limite:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}+2k\right)\pi} \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

si può osservare che il denominatore tende sempre a 0 da valori positivi:

$$|\sin x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \geq -1$$

per cui:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}+2k\right)\pi} \frac{\sin x}{\sin x + 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (\text{il numeratore è negativo})$$

La funzione si presenta graficamente come in figura (in azzurro è rappresentata la funzione *seno*):

