

Derivata delle funzioni seno e coseno.

La derivata della funzione seno è (senza dimostrazione):

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

La derivata della funzione coseno è (senza dimostrazione):

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Derivata della funzione tangente.

Sia:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad f : \mathbf{R} - \left\{ \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Si vuole calcolare la derivata:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

Vale (derivata del rapporto fra due funzioni):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \frac{\frac{d}{dx}(\sin x) \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Per cui:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Derivata della funzione cotangente.

Sia:

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f : \mathbf{R} - \{k\pi; k \in \mathbf{I}\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Si vuole calcolare la derivata:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

Vale (derivata del rapporto fra due funzioni):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{d}{dx}(\cos x) \cdot \sin x - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Per cui:

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ESERCIZI

Si calcolino i seguenti limiti, indicando anche il dominio di definizione delle funzioni.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(3x+1)}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-3x^2+2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3-2x+1}$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3-2x+1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\cos x}$

Esercizio 1.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(3x+1)}{x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione al numeratore – il valore in cui si annulla il denominatore: $x = 0$.

Il dominio di definizione della funzione al numeratore è costituito dai valori di \mathbf{R} per cui l'argomento della funzione logaritmo è > 0 :

$$\lg: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

Questo è vero quando:

$$3x+1 > 0 \Rightarrow 3x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$$

La funzione è quindi definita da:

$$f: \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[- \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \equiv f: \left] -\frac{1}{3}, 0 \right[\cup] 0, +\infty \left[\rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(3x+1)}{x} \quad \text{appare nella forma indeterminata } \frac{0}{0}$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = 3x \quad \rightarrow \quad x = \frac{z}{3}$$

Per cui, quando:

$$x \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad z \rightarrow 0$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(3x+1)}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\lg(z+1)}{\frac{z}{3}} = 3 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\lg(z+1)}{z}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(3x+1)}{x} = 3 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\lg(z+1)}{z} = 3$$

Esercizio 2.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-3x^2+2}$$

Il dominio di definizione della funzione in questo caso è \mathbf{R} .

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite può essere scritto come:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-3x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-3x^2} \cdot e^2 = e^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-3x^2}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$$

Nel caso in esame (l'esponente x è elevato al quadrato):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x^2} = e^{-\infty} = 0$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-3x^2+2} = 0$$

Esercizio 3.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione al numeratore, in questo caso \mathbf{R}^+ , - i valori in cui si annulla il denominatore:

$$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

La funzione è quindi definita da:

$$f: \mathbf{R}^+ - \{1\} \rightarrow \mathbf{R} \quad \equiv \quad f:]0,1[\cup]1,+\infty[\rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1} \quad \text{appare nella forma indeterminata} \quad \frac{0}{0}$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = x-1 \quad \rightarrow \quad x = z+1$$

Per cui, quando:

$$x \rightarrow 1 \quad \rightarrow \quad z \rightarrow 0$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\lg(z+1)}{z} = 1$$

Esercizio 4.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3 - 2x + 1}$$

Il dominio di definizione della funzione in questo caso è \mathbf{R} .

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3} \cdot e^{-2x + 1} = e^{+\infty} \cdot e^{-\infty} = +\infty \cdot 0 \quad \text{appare in forma indeterminata}$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = 4x^3 - 2x + 1 = 2x \left(2x^2 - 1 + \frac{1}{2x} \right)$$

Per cui, quando:

$$x \rightarrow +\infty \quad \rightarrow \quad z \rightarrow (+\infty) \cdot (+\infty - 1 + 0) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} e^z = +\infty$$

Un metodo di calcolo alternativo, senza sostituzione di variabile, è il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x^3 - 2x} \cdot e^{+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \cdot e^{2x(2x^2 - 1)} = e \cdot e^{+\infty(+\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

Esercizio 5.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3 - 2x + 1}$$

Il dominio di definizione della funzione in questo caso è \mathbf{R} .

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3} \cdot e^{-2x + 1} = e^{-\infty} \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot (+\infty) \quad \text{appare in forma indeterminata}$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = 4x^3 - 2x + 1 = 2x \left(2x^2 - 1 + \frac{1}{2x} \right)$$

Per cui, quando:

$$x \rightarrow -\infty \quad \rightarrow \quad z \rightarrow (-\infty) \cdot (+\infty - 1 + 0) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0$$

Un metodo di calcolo alternativo, senza sostituzione di variabile, è il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x^3 - 2x} \cdot e^{+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e \cdot e^{2x(2x^2 - 1)} = e \cdot e^{-\infty(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

Esercizio 6.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione al numeratore, in questo caso \mathbf{R} , – i valori in cui si annulla il denominatore:

$$x = 0$$

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad \text{appare nella forma indeterminata } \frac{0}{0}$$

Si effettua una sostituzione di variabile:

$$z = 2x \quad \rightarrow \quad x = \frac{z}{2}$$

Per cui, quando:

$$x \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad z \rightarrow 0$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\frac{z}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin z}{z} = 2 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$$

Vale:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

Esercizio 7.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dall'intersezione dei domini di definizione delle funzioni al numeratore ed al denominatore, in questo caso \mathbf{R} , – i valori in cui si annulla il denominatore:

$$x + \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad (x = 0 \text{ è l'unico valore che annulla il denominatore})$$

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \quad \text{appare nella forma indeterminata} \quad \frac{0}{0}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Esercizio 8.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dall'intersezione dei domini di definizione delle funzioni al numeratore ed al denominatore, in questo caso \mathbf{R} , – i valori in cui si annulla il denominatore:

$$x + \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad (x = 0 \text{ è l'unico valore che annulla il denominatore})$$

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

La funzione *seno* è una funzione limitata, per cui il limite appare nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Infatti:

$$\sin x \in [-1, 1] \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{o anche} \quad |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$$

Come visto in precedenza:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Esercizio 9.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\cos x}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dall'intersezione dei domini di definizione delle funzioni al numeratore ed al denominatore, in questo caso \mathbf{R} , – i valori in cui si annulla il denominatore:

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in I$$

La funzione è quindi definita da:

$$f : \mathbf{R} - \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in I \right\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\cos x} \quad \text{appare nella forma indeterminata} \quad \frac{0}{0}$$

Vale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 x)^2}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos^3 x$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos^3 x = 0$$

ESERCIZI

Si indichi il dominio di definizione delle funzioni seguenti e se ne calcoli la derivata.

10) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x - 2$

11) $f(x) = e^{x^2+x}$

12) $f(x) = x \cdot \log x$

13) $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}$

14) $f(x) = \log(\log x)$

15) $f(x) = \frac{\log x - 1}{\log x + 1}$

Esercizio 10.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x - 2$$

Il dominio di definizione della funzione è \mathbf{R} :

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è una somma di funzioni, per cui la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x - 2 \right) = 4 \cdot \frac{x^3}{4} - 3 \cdot \frac{x^2}{3} - 1 = x^3 - x^2 - 1$$

Esercizio 11.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{x^2+x}$$

Il dominio di definizione della funzione è \mathbf{R} :

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è una funzione composta, per cui la derivata è:

$$(g(f))'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (e^{x^2+x}) = e^{x^2+x} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + x) = (2x+1) \cdot e^{x^2+x}$$

Esercizio 12.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = x \cdot \log x$$

Il dominio della funzione coincide con il dominio della funzione *logaritmo*:

$$f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è un prodotto di funzioni, per cui la derivata è:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \log x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \log x$$

Esercizio 13.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}$$

Il dominio di definizione della funzione è \mathbf{R} :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

La derivata è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sqrt[3]{(1+x)^2} \right) &= \frac{d}{dx} \left[(1+x)^2 \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{d}{dx} (1+x)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} (1+x)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{1+x}} \end{aligned}$$

Esercizio 14.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \log(\log x)$$

La funzione è una funzione composta *logaritmo* di un *logaritmo*. Il dominio della funzione coincide con i valori per cui l'argomento è:

$$\log x > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D:]1, +\infty[$$

La funzione è quindi definita da:

$$f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è una funzione composta, per cui la derivata è:

$$\frac{d}{dx} [\log(\log x)] = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{d}{dx} (\log x) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \log x}$$

Esercizio 15.

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{\log x - 1}{\log x + 1}$$

Il dominio di definizione della funzione è costituito dal dominio di definizione della funzione *logaritmo* (che si trova sia al numeratore che al denominatore), \mathbf{R}^+ , – i valori in cui si annulla il denominatore:

$$\log x + 1 = 0 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow e^{\log x} = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1}$$

Il dominio della funzione è:

$$D: \mathbf{R}^+ - \{e^{-1}\} \equiv]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$$

La funzione è definita da:

$$f: \mathbf{R}^+ - \{e^{-1}\} \rightarrow \mathbf{R}$$

La funzione è un rapporto tra funzioni, per cui la derivata è:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x - 1}{\log x + 1} \right) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (\log x + 1) - (\log x - 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x + 1)^2} = \frac{\log x + 1 - \log x + 1}{x \cdot (\log x + 1)^2} = \\ &= \frac{2}{x \cdot (\log x + 1)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\log x - 1}{\log x + 1} \right) = \frac{2}{x \cdot (\log x + 1)^2}$$

REGOLA DI DE L'HÔPITAL.

Siano:

$$f, g : A \rightarrow \mathbf{R} , \quad A \subseteq \mathbf{R} , \quad A \text{ intervallo di } \mathbf{R}$$

$$f, g \in C_A \quad (\text{le funzioni } f \text{ e } g \text{ sono continue in ogni punto di } A)$$

$$\exists f'(x), g'(x) \in \mathbf{R} , \quad g'(x) \neq 0 , \quad \forall x \in A$$

$$x_0 \in D(A)$$

La regola di De l'Hôpital si applica quando il limite del rapporto fra le due funzioni è una forma indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

In entrambi i casi, la regola di De l'Hôpital dice che, se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$