ESERCIZI SVOLTI DI FISICA GENERALE II

PARTE I

Due cariche $2q$ e $-q$ occupano i vertici alla base di un triangolo equilatero di lato a. Sul terzo vertice si trova una carica Q. a) Quanto deve valere Q affinché il potenziale elettrico nel punto medio H della base sia nullo? Usando il valore di Q appena determinato, calcolare
b) modulo, direzione e verso del campo elettrostatico nel punto H; c) l'energia potenziale del sistema di cariche. 10^{-6}
[Dati numerici: $q = 1{,}5\cdot 10^{-6} C$; $a = 2{,}4\ cm$]

SOLUZIONE:

Nel punto H il valore del potenziale elettrico dovuto alle tre cariche è dato dall'espressione:

$$V(H) = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2q}{a/2} - \frac{q}{a/2} + \frac{Q}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\right] = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[q + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right]$$

da cui si deduce che $V(H) = 0$ per $Q = -\sqrt{3}q = -2{,}6\ 10^{-6} C$
Scegliendo gli assi coordinati come in figura,
si ha poi

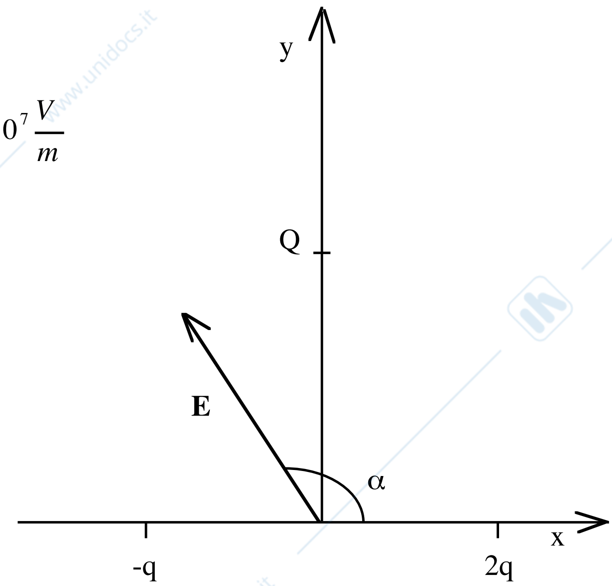
$$E_x(H) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2q}{a^2/4} - \frac{q}{a^2/4}\right] = \frac{-12q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = -28{,}1\cdot 10^7\ \frac{V}{m}$$

$$E_y(H) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{3a^2/4}\right] = 5{,}4\cdot 10^7\ \frac{V}{m}$$

Pertanto

$$E(H) = \sqrt{E_x^2(H) + E_y^2(H)} = 28{,}6\cdot 10^7\ \frac{V}{m}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{E_y(H)}{E_x(H)} = -0{,}192 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 10{,}8^\circ$$



Per definizione l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche è data da

$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}[q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}[-q\cdot 2q + 2q\cdot Q - Q\cdot q] = -3{,}15\ \ J$$

Una carica negativa -q, di massa m, è posta inizialmente nel punto P, sull'asse di un anello di raggio a, vincolato in posizione fissa; P si trova a distanza $a\sqrt{3}$ dal centro dell'anello. L'anello è caricato uniformemente, con carica positiva pari a Q. a) Calcolare la forza cui è soggetta la carica -q. b) La carica -q viene lasciata libera di muoversi partendo dalla situazione di quiete. Con che velocità passa dal centro dell'anello?

[Dati numerici: q=1,5·10^{-8} C; Q=6,0·10^{-8} C; a=10 cm; m=10^{-5} Kg]

SOLUZIONE:

Scegliamo l'asse dell'anello come asse x di un sistema di coordinate.

La densità di carica sull'anello è $\lambda = \dfrac{Q}{2\pi a}$

Consideriamo un generico elementino ds dell'anello: esso porterà una carica $dq = \lambda ds = \dfrac{Q}{2\pi a} ds$ e

creerà nel punto P un campo elettrostatico $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}$.

Ovviamente al campo elettrostatico totale contribuirà solo la componente nella direzione dell'asse dell'anello, in quanto la componente perpendicolare si annullerà con quella, uguale ed opposta, creata dall'elemento ds' diametralmente opposto a ds. Allora:

$$E = E_x = \oint dE \cdot cos\vartheta = \oint \frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\oint ds = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

cioè $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$ e $F = -qE$

Il campo elettrostatico si può valutare anche partendo dal potenziale elettrico nel generico punto dell'asse a distanza x dal piano dell'anello:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{e calcolandone la derivata:} \quad E = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Calcolata nel punto $x=a\sqrt{3}$, la forza vale $F = -4{,}1\cdot10^{-5}\ N$ dove il segno negativo indica che la carica -q viene attirata dall'anello.

Per valutare la velocità con cui la carica giunge nel centro dell'anello, conviene ricorrere alla legge di conservazione dell'energia.
All'inizio la carica -q è ferma e tutta la sua energia è potenziale:

$$U_i = -qV_i = -qV(a\sqrt{3}) \ ; \ K_i = 0$$

Al centro dell'anello parte di questa energia si è trasformata in energia cinetica:

$$U_f = -qV_f = -qV(0) \ ; \ K_f = \frac{1}{2}mv^2$$

e deve essere

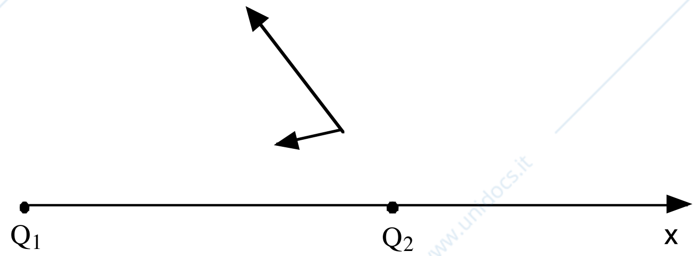
$$U_f - U_i = K_i - K_f$$

Ne risulta $v = \sqrt{\dfrac{2\left(U_i - U_f\right)}{m}} = 2{,}84\,m/s$

Due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 sono fissate a una distanza d l'una dall'altra. a) In quale punto P dello spazio il campo elettrostatico è nullo? b) Si pone una carica $q=Q_1/2$ in un punto situato sulla congiungente le due cariche a distanza s dalla carica Q_2 (e quindi a distanza d-s dalla carica Q_1). Che lavoro è necessario compiere per portare la carica q nel punto P determinato in a)?
[Dati numerici: Q_1 =5,0μC; Q_2 =-10μC; d=1,0m; s=0,25m]

SOLUZIONE:

Poiché un campo è nullo solo se tutte le sue componenti sono nulle, è facile convincersi da un esame della figura che il campo elettrostatico può annullarsi solo sulla retta congiungente le due cariche.



Fissato allora un sistema di riferimento con origine nel punto occupato da Q_1 e l'asse x diretto lungo la congiungente e orientato da Q_1 a Q_2, il punto P è determinato dalla relazione

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0(x-d)^2}=0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{2Q_1}{4\pi\varepsilon_0(x-d)^2}=0$$

o anche $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(x-d)^2}=0$ che ammette le due soluzioni $\begin{cases} x=-1-\sqrt{2}=-2{,}41m \\ x=-1+\sqrt{2}=0{,}41m \end{cases}$

Di queste, solo la prima è accettabile: la seconda soluzione corrisponde a un punto interno al segmento Q_1Q_2, punto in cui i campi generati dalle due cariche sono sì uguali in modulo, ma diretti nello stesso verso (e quindi si sommano e non si sottraggono).
Il punto P richiesto ha dunque coordinata x_P = -2,41 m

Indichiamo con R il punto in cui viene posta la carica q. Un errore abbastanza comune in problemi di questo tipo consiste nel calcolare la forza agente sulla carica q nel punto R e moltiplicare questa forza per la distanza RP, calcolando così il lavoro dalla relazione $L = F\cdot s$

L'errore sta nel fatto che mentre la carica si sposta da R a P, la forza NON è costante. Occorrerà dunque scrivere

$$L=\int_{x_R}^{x_P} F(x)\,dx$$

L'integrale è calcolabile senza particolari difficoltà, ma è comunque più semplice ricorrere alla conservatività del campo elettrostatico e alla definizione di potenziale

$$L = -\Delta U = -q\,\Delta V$$

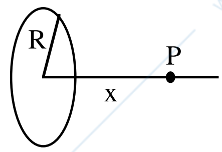
Il tutto si riduce allora a calcolare il potenziale elettrostatico creato dalle cariche Q_1 e Q_2 nei punti R e P e farne la differenza:

$$V_R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{d-s}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{s} \quad ; \quad V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{|x_P|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{|x_p|+d}$$

Ne segue $\Delta V = 2{,}6\cdot 10^5\ V$ e $L = -\,q\,\Delta V = 6{,}4\cdot 10^{-1}\ J$

Alternativamente si può valutare il lavoro come differenza tra le energie elettrostatiche iniziale e finale.

Una carica elettrica q_0 è distribuita uniformemente su un anello di raggio R e di sezione trascurabile. Al centro dell'anello il campo elettrostatico è nullo e così pure all'infinito. Deve pertanto esistere un punto P lungo l'asse dell'anello in cui il campo ha un valore massimo. Determinare:a) la distanza x di P dal centro dell'anello;b) il potenziale in P qualora si supponga nullo il potenziale all'infinito; c) l'energia potenziale di una carica q posta nel punto P.



[Dati numerici: $q_0 = 3{,}2\cdot 10^{-8}$ C; $q = q_0/100$; $R = 6{,}0\ cm$]

SOLUZIONE:

Scegliamo l'asse dell'anello come asse x di un sistema di coordinate. Consideriamo un generico elementino ds dell'anello:

esso porterà una carica $dq = \lambda ds = \dfrac{q_0}{2\pi R} ds$

e creerà nel punto P un campo elettrostatico $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}$

Ovviamente al campo elettrostatico totale contribuirà solo la componente nella direzione dell'asse dell'anello, in quanto la componente perpendicolare si annullerà con quella, uguale ed opposta, creata dall'elemento ds' diametralmente opposto a ds. Allora:

$$E = E_x = \oint dE \cdot \cos\vartheta = \oint \frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\oint ds = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Il punto di massimo è determinato dalla condizione $\dfrac{dE}{dx} = 0$

cioè $$\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} - \frac{3}{2}x\left(x^2+R^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = 0$$

da cui $$\frac{3x^2}{x^2+R^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}} = 4{,}2\,cm$$

Il potenziale nel punto P si può calcolare, ad esempio, da:

$$V(x) = \int_\infty^x E\,dx = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} \qquad \text{che dà} \qquad V\!\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{6}\varepsilon_0} = 3{,}9\cdot 10^3\,V$$

Naturalmente si può anche partire dal dV creato da un elementino ds, integrando poi sull'anello:

$$V = \oint dV = \oint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}$$

L'energia potenziale elettrostatica della carica q è infine, per definizione,

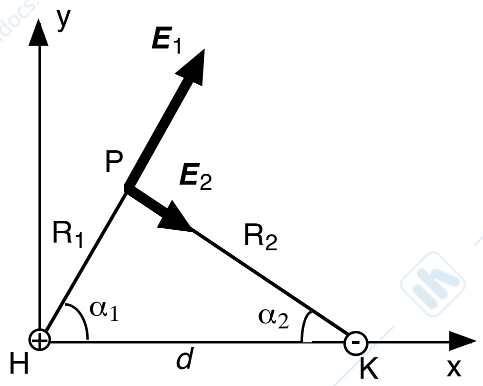
$$U(R/2) = q\,V(R/2) = 1{,}25\ \ 10^{-6}\ J$$

Due fili indefiniti, rettilinei e paralleli, sono carichi con densità uniforme λ uguale in modulo per entrambi, ma di segno opposto. La distanza tra i due fili è d.
a) Calcolare il campo elettrico E nel punto P distante R_1 dal filo positivo e R_2 da quello negativo.
b) Calcolare la forza per unità di lunghezza con cui i due fili si attraggono.
[Dati numerici: $\lambda=10^{-8}\ C/m$; $d=5{,}0\,cm$; $R_1=3{,}0\,cm$; $R_2=4{,}0\,cm$]

SOLUZIONE:

Il campo elettrostatico nei punti a distanza r da un filo uniformemente carico è perpendicolare al filo ed ha modulo $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, come si riconosce immediatamente per esempio applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica di raggio r, con asse coincidente col filo.
[N.B. il calcolo non viene qui riportato in quanto presente in tutti i testi universitari di Fisica generale].

Nei punti a distanza R_1 dal filo positivo esso vale $E_1 = 6{,}0\cdot 10^3\ V/m$, mentre nei punti a distanza R_2 dal filo negativo vale $E_2 = 4{,}5\cdot 10^3\ V/m$. Le direzioni e versi di questi due campi sono quelli indicati in figura, in cui i fili sono rappresentati perpendicolari al piano del foglio e lo incontrano nei punti H e K.
Notare, per inciso, che con i dati del problema il punto P sta fuori del piano dei due fili e che il triangolo HPK è rettangolo in P.



Quanto al punto P, le sue coordinate sono determinate dalle condizioni

$$\begin{cases} PH^2 = R_1^2 \\ PK^2 = R_2^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2 \\ (x-d)^2 + y^2 = R_2^2 \end{cases}$$

che danno $x = 1{,}8\ cm$ e $y = \pm 2{,}4\ cm$. C'è simmetria in y e nella figura si è considerata la soluzione positiva.
Poiché i campi E_1 ed E_2 sono perpendicolari, il campo risultante ha modulo

$$E=\sqrt{E_1^2+E_2^2}=7{,}5\cdot 10^3 V/m$$

e le sue componenti valgono

$$E_x = E_1\cos\alpha_1 + E_2\cos\alpha_2 = 7{,}2\cdot 10^3 V/m$$
$$E_y = E_1\sin\alpha_1 - E_2\sin\alpha_2 = 2{,}1\cdot 10^3 V/m$$

essendo $\sin\alpha_1=\dfrac{y}{R_1}=0{,}8$; $\sin\alpha_2=\dfrac{y}{R_2}=0{,}6$; $\cos\alpha_1=\sin\alpha_2$; $\cos\alpha_2=\sin\alpha_1$

In un elemento dz di uno dei due fili è contenuta una carica $dq=\lambda\, dz$ su cui agisce una forza dF, dovuta al campo creato dall'altro filo, pari a

$$dF = E\cdot dq = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\cdot\lambda\ dz$$

e pertanto $F=\displaystyle\int_{unità\ di\ lunghezza} dF=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d}=3{,}6\cdot 10^{-5} N/m$

Una sfera di raggio R = 10 cm è caricata in modo tale che il campo e.s. al suo interno sia diretto radialmente verso l'esterno e valga $E = kr^2$ [r = distanza dal centro della sfera e $k = 9\ kV / m^3$]. Determinare:
a) segno e valore della carica della sfera;b) il potenziale elettrostatico al centro della sfera; c) la velocità con cui arriva al centro della sfera un elettrone che parte d□a fermo dalla superficie.

SOLUZIONE:

Il campo elettrostatico all'esterno della sfera vale $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ e per $r = R$ deve coincidere col campo interno:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = kR^2 \qquad ; \qquad \text{di qui} \quad Q = 4\pi\varepsilon_0 kR^4 = 1{,}0\cdot 10^{-10}\ \text{C}$$

Allo stesso risultato si perviene applicando il teorema di Gauss a una superficie coincidente con quella della sfera carica.
La carica Q è ovviamente positiva. Tra l'altro questo era implicito nel testo, essendo il campo interno diretto radialmente verso l'esterno della sfera o anche osservando che un elettrone lasciato libero tende a muoversi dalla superficie verco il centro.
Per definizione, il potenziale al centro della sfera è

$$V_0 = -\int_\infty^0 E(r)dr = -\int_\infty^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr - \int_R^0 kr^2 dr = \frac{4}{3}kR^3 = 12\ \text{V}$$

Essendo il campo e.s. conservativo, basterà applicare la legge di conservazione dell'energia. All'inizio l'elettrone si trova fermo sulla superficie della sfera: $K_i = 0$; $U_i = eV_i = e\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$.

Alla fine, si trova al centro con velocità incognita v: $K_f = \frac{1}{2}mv^2$; $U_f = eV_0 = e\frac{4}{3}kR^3$

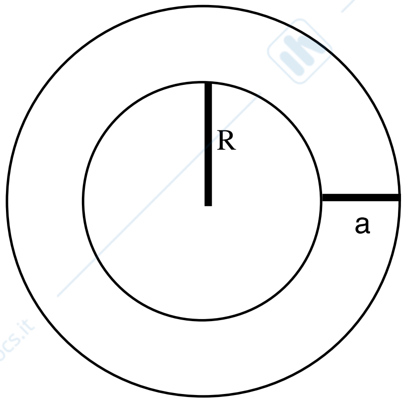
Pertanto: $\frac{1}{2}mv^2 = e(V_i - V_0) = -\frac{1}{3}ekR^3$ da cui si ottiene $v = \sqrt{-\frac{2ekR^3}{3m}} = 1{,}03\cdot 10^6\ \text{m/s}$

Un conduttore sferico di raggio R = 10 cm é ricoperto da uno strato di spessore a = 5 cm di materiale isolante con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$. Determinare:

a) la capacità del conduttore; b) l'energia occorrente per caricarlo a carica $Q = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$ C

SOLUZIONE:

Semplici applicazioni del teorema di Gauss permettono di calcolare il campo elettrostatico nelle differenti regioni di spazio



$E_1(r) = 0$ per $r < R$

$$E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$$ per $R < r < R+a$

$$E_3(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$ per $r > R+a$

Essendo, per definizione, la capacità data dal rapporto Q/V, occorre procurarsi l'espressione del potenziale del conduttore, ciòe della superficie sferica di raggio R, o meglio la d.d.p. tra questa superficie e l'infinito.

Si ha allora

$$|V| = \int_R^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_R^\infty E dr = \int_R^{R+a} E_2 dr + \int_{R+a}^\infty E_3 dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R+a}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a+\varepsilon_r R}{\varepsilon_r R(R+a)}$$

da cui

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{R(R+a)}{a+\varepsilon_r R} = 13{,}4 \text{ pF}$$

Si osservi che il sistema proposto è equivalente a un condensatore sferico (con dielettrico) di raggi R e $R+a$, in serie con un condensatore nel vuoto di raggi $R+a$ e ∞.
Le capacità di questi due condensatori sono, rispettivamente,

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{R(R+a)}{a} \qquad \text{e} \qquad C_2 = 4\pi\varepsilon_o(R+a)$$

La loro capacità equivalente $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ coincide con quella sopra determinata.

Quando alla seconda domanda, basta osservare che l'energia spesa per caricare il conduttore si ritrova alla fine immagazzinata nel campo elettrostatico. Continuando a pensare in termini di condensatori, si scrive subito

$$E = \frac{Q^2}{2C} = 0{,}66 \text{ J}$$

Una carica puntiforme positiva q = 2,0 nC è situata al centro di una distribuzione uniforme sferica di carica negativa di raggio R = 10 cm. La carica totale negativa è $-q$. Calcolare:
a) il valore del campo elettrostatico nei punti a distanza $r_1 = R/2$ dalla carica q; b) il potenziale alle distanze r_1 e $r_2 = 2R$ dalla carica q; c) l'energia elettrostatica contenuta nello spazio esterno alla sfera di raggio r_1 centrata sulla carica q.

SOLUZIONE:

Il campo elettrostatico è dato in tutti i punti dello spazio dalla somma dei due contributi: quello della carica positiva q (chiamiamolo E_+) e quello (E_-) della distribuzione sferica negativa. Occorre osservare che i punti a distanza r_1 dalla carica q sono interni alla distribuzione sferica; E_- sarà pertanto determinato, a norma del teorema di Gauss, solo dalla cariche negative interne alla sfera con centro in q e raggio r_1: il calcolo si trova sotto forma di esempio in tutti i testi di elettrostatica.

Ne segue, a una generica distanza $r < R$ dalla carica q:

$$E(r) = E_+(r) + E_-(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^3}\right)$$

Sostituendo i valori numerici $E(r_1) = 6{,}3 \cdot 10^3$ V/m.

Da quanto sopra detto è poi evidente che nei punti esterni alla distribuzione sferica il campo elettrostatico è nullo. Questa osservazione è utile ai fini della risposta alla seconda domanda.

Per definizione, il potenziale elettrostatico nei punti a distanza r_1 dalla carica q è dato da

$$V(r_1) = \int_{r_1}^{\infty} E(r)\,dr = \int_{r_1}^{R} E(r)\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{R}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right]dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5}{8R} = 112 \text{ V}$$

Analogamente:

$V(r_2) = \int_{r_2}^{\infty} E(r)\,dr = 0$ essendo, come già detto, il campo elettrostatico nullo in tutti i punti esterni alla distribuzione sferica.

Per il calcolo dell'energia elettrostatica è sufficiente ricordare l'espressione della densità di energia w (per unità di volume): $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Essendo E variabile, occorre procedere per infinitesimi. Si considera allora un generico volumetto $d\tau$ a distanza r dalla carica q e si calcola l'energia elettrostatica in esso contenuta: $dW = w\,d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$; infine si sommano i contributi di tutti i volumetti contenuti nella regione che interessa:

$$W = \int_{EST} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

(essendo *EST* lo spazio esterno alla sfera di raggio r_1 centrata sulla carica q)

Quindi

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{r_1}^{R}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right]^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{71}{160R} = 8{,}0 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Una sfera di raggio R = 10 cm è carica uniformemente. La sfera è circondata da materiale dielettrico, omogeneo e isotropo, per uno spessore d = 10 cm. Si sa che il potenziale sulla superficie esterna del dielettrico è V_e = 50 V, mentre al centro della sfera vale V_0 = 125 V. Determinare:

a) la densità di carica nella sfera; b) il valore della costante dielettrica relativa del materiale.

SOLUZIONE:

Ci si rende facilmente conto che sono presenti tre zone significativamente diverse dal punto di vista elettrostatico: la zona interna alla sfera, la zona occupata dal dielettrico, la zona esterna che si estende dalla superficie del dielettrico fino all'infinito.
I campi elettrostatici in queste tre zone si calcolano facilmente ricorrendo al teorema di Gauss. I calcoli necessari non vengono qui riportati in quanto reperibili su tutti i libri e anche in altri esercizi di questa raccolta.
Si ottiene comunque:

1) Campo interno alla sfera ($0 < r < R$) $\qquad E_{\text{int}} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

2) Campo interno al dielettrico ($R < r < R+d$) $\qquad E_{\text{diel}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

3) Campo esterno ($r > R+d$) $\qquad E_{\text{est}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

Nelle tre espressioni ρ rappresenta la densità volumica di carica.

I dati del problema permettono di scrivere subito

$$V_{\text{est}} - V_\infty = V_{\text{est}} = \int_{R+d}^{\infty} E_{\text{est}}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R+d} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 (R+d)} = 50 \text{ V}$$ da cui si ricava ρ; e

$$V_0 - V_\infty = V_0 = \int_0^R E_{\text{int}}\,dr + \int_R^{R+d} E_{\text{diel}}\,dr + \int_{R+d}^{\infty} E_{\text{est}}\,dr$$ o anche

$$V_0 - V_{\text{est}} = \int_0^R E_{\text{int}}\,dr + \int_R^{R+d} E_{\text{diel}}\,dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right] + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^2}{2} = 125 \text{ V - } 50 \text{ V} = 75 \text{ V}$$ da cui si ottiene il valore della costante dielettrica relativa.

Eseguendo i calcoli:

$$\rho = 2{,}7 \cdot 10^{-7}\,\frac{C}{m^3} \quad \text{e} \quad \varepsilon_r = 2.$$

Una sfera conduttrice di raggio R_1 = 10 cm porta una carica $Q = 10^{-6}$ C. Se attorno ad essa viene posto un guscio conduttore inizialmente scarico, di raggio interno R_2 = 15 cm ed esterno R_3 = 20 cm, di quanto variano il potenziale della sfera interna e l'energia elettrostatica del sistema?

SOLUZIONE:

Inizialmente, prima di venire posta nel guscio, la sfera si trova al potenziale $V_{iniz} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ mentre il campo elettrostatico da essa creato vale

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R_1) \end{cases}$$

Inserendo il guscio, su questo vengono indotte:
- una carica $-Q$ sulla superficie interna di raggio R_2;
- una carica +Q sulla superficie esterna di raggio R_3.

Entrambe queste cariche sono distribuite uniformemente, per simmetria.

Il teorema di Gauss consente di calcolare rapidamente i campi elettrostatici nelle varie zone:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_3 < r) \end{cases}$$

Ne segue:

$$V(R_1) = V_{fin} = -\int_{R_1}^{\infty} Edr = -\int_{R_1}^{R_2} Edr - \int_{R_2}^{R_3} Edr - \int_{R_3}^{\infty} Edr = -\int_{R_1}^{R_2} Edr - \int_{R_3}^{\infty} Edr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_3}\right)$$

e quindi

$$\Delta V = V_{fin} - V_{iniz} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) = -1{,}5 \cdot 10^4\,\text{V}$$

Conoscendo le espressioni dei campi elettrostatici, è facile calcolare l'energia e.s. totale.

All'inizio

$$U_{iniz} = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

e alla fine

$$U_{fin} = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Troviamo così $\quad \Delta U = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_3} - \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{1}{2}Q\Delta V = -7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{J}$

Alternativamente, si poteva considerare la sfera iniziale come un condensatore sferico con un'armatura spostata all'infinito:

$$U_{iniz} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Osserviamo però che alla fine il sistema sfera+guscio **NON** è equivalente a un condensatore sferico. Sulle due armature **NON** ci sono le cariche $+Q$ e $-Q$, bensì $+Q$ e 0 ($-Q$ sulla superficie interna e $+Q$ su quella esterna). Il sistema è in realtà equivalente a un condensatore sferico (da raggi R_1 e R_2) circondato da una carica sferica di raggio R_3 (cioè un altro condensatore sferico con un'armatura all'infinito).

Ne segue

$$U_{fin} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2}$$

con

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \text{e} \quad C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_3 .$$

Sostituendo, si ritrova la stessa espressione trovata in precedenza.

Si abbiano due sfere conduttrici concentriche di raggi R_1 e R_2. Se F è il potenziale della sfera interna, calcolare la carica q presente su di essa nell'ipotesi che la sfera esterna sia collegata a terra. Trovare inoltre per quale valore di R_1 il campo elettrostatico alla superficie della sfera interna assume il valore minimo e determinare tale valore.

[Dati numerici: $R_1 = 4{,}0 \cdot 10^{-2}\ m$; $R_2 = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ m$; F = 50 V]

SOLUZIONE:

Il sistema in esame è praticamente un condensatore sferico tra le cui armature esiste una differenza di potenziale Φ. La capacità del condensatore è

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

e quindi la carica presente sulle armature vale $q = C\Phi = 1{,}1 \cdot 10^{-9}\ C$.

Lo stesso risultato si può ricavare usando il teorema di Gauss e la definizione di differenza di potenziale.
Nello spazio tra le due sfere ($R_1 \le r \le R_2$) il campo elettrostatico ha direzione radiale e modulo

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

e pertanto $$\Delta V = \Phi = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

da cui, infine, $q = 4\pi\varepsilon_0 \Phi \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ coincidente con l'espressione ottenuta in precedenza.

La seconda domanda è abbastanza semplice se la si inquadra nel contesto dell'intero problema. Viene richiesto di immaginare di variare il raggio della sfera interna e di trovarne il valore che rende minimo il campo elettrostatico per $r=R_1$. E' importante notare che al variare di R_1 cambia anche il valore di q, e pertanto occorre procurarsi un'espressione del campo E che non contenga esplicitamente la carica.
Questa si ottiene facilmente dalle formule precedenti

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ e $q = 4\pi\varepsilon_0 \Phi \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ che danno subito $E = \Phi \frac{R_2}{R_1(R_2 - R_1)}$

Il problema si è così ridotto alla determinazione del minimo della funzione $E(R_1)$. Determinando il valore della variabile che annulla la derivata prima, si arriva alla condizione $R_1 = \frac{R_2}{2}$.
In corrispondenza di tale valore di R_1 il campo elettrostatico vale, sulla superficie della sfera interna,

$$E_{\min} = \frac{4\Phi}{R_2} = 4 \cdot 10^3\ V/m$$

Due conduttori sferici isolati, di raggi r_1 = 2,0 cm e r_2 = 3,0 cm, posti in aria a distanza d = 10 m, sono caricati rispettivamente ai potenziali V_1 = 50 V e V_2 = 100 V rispetto all'infinito. Si stabilisce fra essi un contatto elettrico mediante un filo conduttore di capacità elettrica trascurabile che viene successivamente tolto. Determinare:
a) la capacità finale del sistema delle due sfere;b) di quanto è variata la forza di repulsione tra le due sfere.

SOLUZIONE:

Data la grande distanza tra le due sfere (rispetto ai loro raggi), queste possono essere considerate come due conduttori isolati.
Pertanto, prima del contatto elettrico,

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \qquad \text{e} \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

da cui si deducono immediatamente le singole capacità

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1 \qquad \text{e} \qquad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2$$

e la forza di repulsione $\quad F = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = 0{,}324 \cdot 10^{-11} N$

Dopo che è stato stabilito il contatto si raggiunge una situazione di equilibrio in cui le due sfere si vengono a trovare allo stesso potenziale. Per giungere a ciò occorre che una parte della carica della sfera inizialmente a potenziale maggiore passi in quella a potenziale minore. La carica totale però si mantiene invariata e così pure le capacità (che non dipendono né della cariche né dai potenziali, ma solo dalla configurazione geometrica). Indicando con simboli con apice le grandezze che si riferiscono allo stato finale, abbiamo perciò:

$$C_1 V' = Q_1' \quad ; \quad C_2' V' = Q_2'$$
$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$$

Se ne deduce subito

$$C_1 V' + C_2 V' = Q_1 + Q_2 \qquad \text{da cui} \quad V' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = 79{,}5 V$$

Da quest'ultima espressione risulta evidente che la capacità totale (pari al rapporto tra la carica e il potenziale) vale

$$C' = C_1 + C_2 = 5{,}5 \cdot 10^{-12} F$$

E' ora facile ricavare i valori delle cariche finali sulle due sfere e la corrispondente forza di repulsione

$F' = \dfrac{Q_1' Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 d} = 0{,}442 \cdot 10^{-11} N \qquad$ da cui F'/F = 1,36

Le armature di un condensatore piano, aventi area A=1,5 m^2 e poste a distanza d=2 cm l'una dall'altra, sono connesse a un generatore di tensione ΔV=140 V e a carica avvenuta vengono isolate. Un foglio metallico di spessore s=3 mm, avente la stessa configurazione e area delle armature, viene poi inserito tra le armature stesse parallelamente ad esse. Determinare:
a) la variazione di capacità del condensatore; b) la nuova differenza di potenziale tra le armature; c) il lavoro compiuto dal campo elettrico durante l'introduzione del foglio.

SOLUZIONE:

Inizialmente $C_1 = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d} = 6{,}64 \ \ 10^{-10} F$.
Dopo l'introduzione del foglio metallico possiamo trattare il sistema come una serie di due condensatori piani: è importante rendersi conto che la capacità C_2 del sistema non dipende dalla posizione del foglio.

Siano x ed y le distanze del foglio dalle due armature: $x + y + s = d$

Allora: $\dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \dfrac{A}{x}} + \dfrac{1}{\varepsilon_0 \dfrac{A}{y}} = \dfrac{x+y}{\varepsilon_0 A} = \dfrac{d - s}{\varepsilon_0 A}$ e $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d - s} = 7{,}81 \ \ 10^{-10} F$

che, come detto, non dipende da x ed y.

Infine $\Delta C = C_2 - C_1 = \varepsilon_0 A \left[\dfrac{1}{d - s} - \dfrac{1}{d} \right] = 1{,}17 \cdot 10^{-10} F$

Inserendo il foglio, la carica sul condensatore non varia e quindi $Q = C_1 \, \Delta V_1 = C_2 \, \Delta V_2$

da cui si ottiene subito $\Delta V_2 = \dfrac{d - s}{d} \Delta V_1 = 1{,}2 \ \ 10^2 V$

Essendo il sistema isolato ed essendo il campo elettrostatico conservativo, il lavoro coinciderà con la diminuzione di energia potenziale elettrostatica conseguente l'introduzione del foglio.

$$L = -\Delta E_p = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 - \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 \approx 10^{-6} J$$

Un condensatore piano, avente il vuoto tra le armature, ha una capacità $C_0 = 4{,}0 \cdot 10^{-9}$ F ed è collegato permanentemente ad una sorgente di forza elettromotrice continua $V = 100$ *volt*. Ad esso viene collegato in parallelo un condensatore uguale e scarico.
a) Di quanto varia l'energia elettrostatica del sistema dei due condensatori dopo il collegamento? b) Quanto dovrebbe valere la costante dielettrica di una sostanza da introdurre tra le armature dei due condensatori per far sì che l'energia immagazzinata nel sistema diventi 5 volte maggiore?

SOLUZIONE:

Quando i due condensatori sono separati le energie elettrostatiche in essi immagazzinate sono

$$U_1 = \frac{1}{2} C_0 V^2 = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ T \quad ; \quad U_2 = 0$$

e quindi l'energia totale $U_0 = U_1$.

Dopo il collegamento in parallelo la capacità totale diventa $C = 2\,C_0 = 8 \cdot 10^{-9}\ F$.

Pertanto $U_f = \frac{1}{2} C V^2 = 4{,}0 \cdot 10^{-5}\ T$ e $\Delta U = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ T$

Se si introduce il dielettrico tra le armature, le capacità diventano ε_r volte maggiori e così pure l'energia immagazzinata. Indicando con U_d l'energia in queste condizioni, deve essere:

$U_d = 5\,U_0 = 5\,U_1$ cioè $\frac{1}{2}\varepsilon_r C V^2 = 5 \cdot \frac{1}{2} C_0 V^2$ da cui $\varepsilon_r = 2{,}5$

Due condensatori piani identici sono collegati in serie con una batteria di f.e.m. di 100 V. Siano S l'area di ciascuna armatura ed a la distanza fra le armature di uno stesso condensatore. Mantenendo collegata la batteria, si inserisce in uno dei due condensatori una lastra di rame di spessore b in modo che essa occupi la zona centrale del condensatore.
a) Calcolare il numero di elettroni sulle armature dei condensatori, prima e dopo l'inserimento della lastra di rame. b) Ripetere il calcolo supponendo che la lastra, invece che di rame, sia di mica.
[Dati: a=1 cm; b=5 mm; S=100 cm^2; ε_r=costante dielettrica relativa della mica=7,6]

SOLUZIONE:

Il collegamento è quello della fig. 1.

La capacità di ciascuno dei due condensatori è $C = \varepsilon_0 \frac{S}{a} = 8{,}86 pF$ e la capacità totale (equivalente) è

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2} = 4{,}43\ pF$$

La carica totale fornita dalla batteria risulta allora $Q = C_{eq} V = 4{,}43 \cdot 10^{-10}\ Cb$

Questa carica è quella presente su <u>ogni</u> armatura, essendo i due condensatori collegati in serie; il numero di elettroni, in eccesso o difetto su ogni armatura, è dunque

$$N = Q/e = 2{,}77 \cdot 10^9$$

L'inserimento della lastra di rame equivale a trasformare uno dei condensatori in una coppia di condensatori in serie (fig. 2), ciascuno di capacità $C_1 = 4\,C$ in quanto la distanza tra le loro armature è $a/4$.

La nuova capacità totale (equivalente) diventa ora $\frac{1}{C'_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{4C} + \frac{1}{4C} = \frac{3}{2C}$

e quindi $C'_{eq} = \frac{2}{3} C$ e pertanto $Q' = \frac{2}{3} CV = \frac{4}{3} Q$

Osservare come questi risultati non dipendano dalla effettiva posizione della lastra.

Ne segue: $N' = Q'/e = 3{,}7 \cdot 10^9$

L'inserimento della lastra di mica equivale a trasformare il condensatore in tre in serie (fig. 3): due a vuoto (con distanza tra le armature $a/4$=2,5 mm e capacità $C_1 = 4\ C$) e uno a mica (con distanza tra le armature b=5 mm e capacità $C_2 = 2\ \varepsilon_r C$).

La capacità totale (equivalente) diventa ora $\frac{1}{C''_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{4C} + \frac{1}{4C} + \frac{1}{2\varepsilon_r C}$

cioè $C''_{eq} = \frac{2\varepsilon_r}{3\varepsilon_r + 1} C$. Quindi $Q'' = \frac{2\varepsilon_r}{3\varepsilon_r + 1} CV$ e $N'' = \frac{Q''}{e} = \frac{4\varepsilon_r}{3\varepsilon_r + 1} N = 3{,}54\ 10^9$

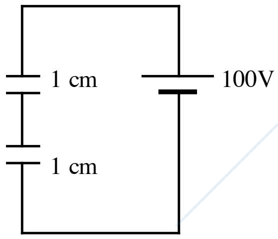


Fig. 1

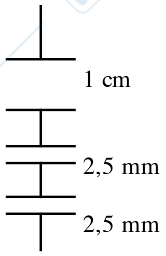


Fig. 2

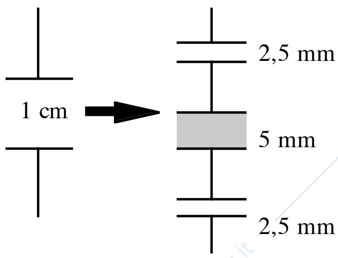


Fig. 3

Un sistema costituito da due condensatori piani, identici, di capacità $C = 10^{-10}\ F$, connessi in parallelo, viene caricato collegandolo a un generatore ($V_0 = 500\ V$) e poi isolato. Uno dei due condensatori viene successivamente riempito completamente con un materiale di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$. Calcolare:

a) i valori delle cariche presenti alla fine sulle armature dei due condensatori; b) la variazione complessiva di energia elettrostatica.

SOLUZIONE:

L'unica difficoltà dell'esercizio consiste nel rendersi conto che, essendo il sistema isolato, la carica totale deve mantenersi inalterata. D'altra parte, i due condensatori sono collegati in parallelo e quindi le due d.d.p. tra le armature devono essere uguali.
Ne segue che introducendo il dielettrico si provoca una ridistribuzione delle cariche in modo da soddisfare le due condizioni precedenti. La d.d.p. tra le armature dei condensatori **NON** sarà più quella iniziale.

Indicando con q la carica inizialmente presente sulle armature e con q_1 e q_2 le cariche finali (sia ad es, 2 il condensatore con dielettrico), si hanno allora le due condizioni

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 2q & (conservazione\ \ della\ \ carica) \\ \dfrac{q_1}{C} = \dfrac{q_2}{\varepsilon_r C} & (uguaglianza\ \ delle\ \ d.d.p.) \end{cases}$$

ricordando naturalmente che $\Delta V = \dfrac{Q}{C}$ e che la capacità di un condensatore con dielettrico è ϵ_r volte quella dello stesso condensatore senza dielettrico.

Osservando che $q = CV = 0{,}5\cdot 10^{-7}\ C$ e risolvendo il sistema, si ottiene

$q_1 = q/2 = 0{,}25 \cdot 10^{-7}\ C$
$q_2 = 3q/2 = 0{,}75 \cdot 10^{-7}\ C$

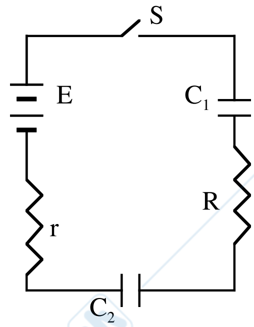
Con questi valori la d.d.p. finale tra le armature vale $V_{fin}=q_1/C = 250$ V

La variazione di energia elettrostatica è infine:

$$\Delta W = W_{fin} - W_{in} = \left(\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{\varepsilon_r C}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = -1{,}25 \cdot 10^{-5}\ J$$

Come si vede, l'energia è diminuita. Ciò è dovuto all'effetto combinato del lavoro speso per l'introduzione del dielettrico e del lavoro necessario per lo spostamento della cariche da un condensatore all'altro.

Due condensatori sono caricati in serie, come è mostrato nel circuito in figura.
a) Qual è la costante di tempo del circuito di carica ?Dopo essere stato chiuso per un tempo pari alla suddetta costante di tempo, l'interruttore S viene aperto.
b) Qual è la differenza di potenziale ai capi del condensatore C_2 ?
[Dati numerici: $E = 12\ V$; $r = 1\ \Omega$; $R = 5\ \Omega$; $C_1 = 3\mu F$; $C_2 = 6\ \mu F$]



SOLUZIONE:

Il circuito equivale a un circuito RC costituito da una capacità C, pari alla serie dei due condensatori, e una resistenza R_0 pari alla serie delle due resistenze.

$$R_0 = r + R = 6\ \Omega \qquad \text{e} \qquad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2\ \mu F$$

L'equazione del circuito è quindi $E - q/C = R_0 i$ o anche $\frac{i}{C} + R_0 \frac{di}{dt} = 0$

Questa equazione è quella della carica di un condensatore attraverso una resistenza R_0.

La costante di tempo richiesta è dunque

$$\tau = R_0 C = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ s$$

La differenza di potenziale ai capi della capacità risulta

$$V(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{R_0 C}}\right)$$

e al tempo $t = \tau = R_0 C$: $V(\tau) = E\,(1 - e^{-1}) = 7{,}5\ V$

La carica presente sulla capacità è allora $q = CV$ che è anche la carica presente sia su C_1 sia su C_2. Ne segue

$$V_2 = q/C_2 = 2{,}5\ V.$$

Un condensatore scarico di capacità C_1 viene caricato finché tra le armature non si stabilisce una differenza di potenziale V_1. Dopo averlo scollegato dal generatore, lo si collega in parallelo con un secondo condensatore. Si osserva che:
- se lo spazio tra le armature del secondo condensatore è vuoto, la d.d.p. tra le armature scende al valore V_2;
- se lo spazio tra le armature del secondo condensatore è riempito di un certo dielettrico, la d.d.p. scende al valore V_3.

Determinare a) la costante dielettrica relativa del dielettrico; b) come si ripartisce la carica tra i due condensatori (alla fine dell'esperimento, col dielettrico inserito)

[Dati numerici: C_1 = 0,1μF; V_1 = 25V; V_2 = 15V; V_3 = 8V]

SOLUZIONE:

La carica totale posseduta dal condensatore 1 al momento in cui viene scollegato dal generatore è ovviamente data da

$$Q = C_1 V_1 = 2{,}5\ \mu C$$

In tutte le operazioni successive questa carica totale si mantiene inalterata: soltanto, si suddivide tra i due condensatori.
Consideriamo dapprima il caso del condensatore 2 senza dielettrico.
Poiché il sistema dei due condensatori equivale a un unico condensatore di capacità

$$C_1 + C_2$$

si avrà

$$Q = (C_1 + C_2)\, V_2, \qquad \text{da cui si ottiene il valore } C_2 = 67\ nF$$

Quando viene inserito il dielettrico, di costante dielettrica relativa ε_r, la capacità del secondo condensatore diventa $\varepsilon_r C_2$ e pertanto

$$Q = (C_1 + \varepsilon_r C_2)\, V_3 \qquad \text{da cui } \varepsilon_r = 3{,}2.$$

Il calcolo delle cariche sui due condensatori è immediato

$$Q_1 = C_1\, V_3 = 0{,}8\ \mu C \qquad \text{e} \qquad Q_2 = \varepsilon_r C_2\, V_3 = 1{,}7\ \mu C$$

Si verifica che $Q_1 + Q_2 = Q$, come dev'essere.

Un condensatore piano (area delle armature S; distanza tra le armature d) viene caricato alla d.d.p. V_0. Successivamente il generatore viene scollegato e viene introdotta nel condensatore, parallelamente alle armature, una lastra di materiale dielettrico di spessore b e costante dielettrica relativa ε_r=7. Calcolare i valori, alla fine del processo descritto, della a) carica elettrica sulle armature del condensatore; b) d.d.p. fra le armature;c) capacità del condensatore.
[Dati numerici:S=100cm^2;d=1,0cm;V_0 =100V;b=0,50cm]

SOLUZIONE:

La carica presente sulle armature prima dell'inserimento del dielettrico si ottiene dalla relazione

$Q_0 = C_0 V_0$ con $C_0 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ e vale $Q_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-10}\, C$

Questo valore NON cambia in seguito all'introduzione della lastra dielettrica (si ricordi che il condensatore è stato isolato dal generatore).

Il teorema di Gauss ci permette di calcolare velocemente il campo elettrostatico nei vari punti all'interno del condensatore:

- nello spazio vuoto $E_0 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} = 10^4 \dfrac{V}{m}$
- nel dielettrico $E_d = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = 1{,}4 \cdot 10^3 \dfrac{V}{m}$

da cui è facile determinare la d.d.p. fra le armature

$$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_0 (d - b) + E_d b = 57V$$

Se ne deduce la capacità finale

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{b + \varepsilon_r (d - b)} = 1{,}55 \cdot 10^{-11} F$$

E' possibile, e forse anche più semplice, risolvere il problema rispondendo prima alla domanda 3 e successivamente alla 2. Vediamo:
Dopo l'introduzione della lastra il sistema è equivalente alla serie di due condensatori, uno nel vuoto, di spessore d-b, e uno con dielettrico di spessore b, le cui capacità sono rispettivamente
$C_1 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d - b}$ e $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{b}$. La capacità equivalente è allora $C_{eq} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1{,}55 \cdot 10^{-11} F$ e quindi la d.d.p. fra le armature risulta $\Delta V = \dfrac{Q}{C_{eq}} = 57V$

Un fornello elettrico di resistenza R assorbe una potenza di 0,4 kW sotto una differenza di potenziale di 220 V. Poiché il fornello riscalda troppo, per ridurre la temperatura viene posta in serie alla resistenza R una resistenza r in modo che la potenza dissipata nel fornello si riduca del 10%. Nell'ipotesi che R sia sostanzialmente indipendente dalla temperatura, determinare: a) il valore della resistenza r;b) di quanto si riduce percentualmente la potenza ceduta dal generatore.

SOLUZIONE:

Prima dell'inserimento della resistenza r, tutti i 220 V di d.d.p. sono applicati ai capi della resistenza R del fornello che dissipa una potenza

$P_1 = 0{,}4\ W$ (pari a quella ceduta dal generatore).

Si vuole che questa potenza si riduca del 10% e passi quindi al valore $P_2 = 0{,}9\ P_1 = 360\ W$.

Per inciso, il valore di R si ottiene subito dalla relazione $R = \frac{V^2}{P_1} = \frac{220^2\ V}{400\ W} = 1{,}21 \cdot 10^2\,\Omega$

Affinché in R si dissipi la potenza P_2 occorre che vi circoli la corrente

$$P_2 = i^2 R \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{\frac{P_2}{R}} = 1{,}725\,A$$

che ovviamente sarà anche quella che circolerà in r, dato che le due resistenze sono disposte in serie.

E' allora immediato scrivere

$$R + r = \frac{V}{i} \qquad \text{e ottenere} \qquad r = \frac{V}{i} - R = 6{,}5\Omega$$

La nuova potenza ceduta dal generatore vale ora $P_{gen} = Vi = 379{,}5W$ con una riduzione percentuale di

$$\frac{P_1 - P_{gen}}{P_1} = \frac{20{,}5\ W}{400\ W} = 5{,}12\%$$

Due resistenze R_1 e R_2 sono connesse in parallelo e il gruppo è collegato a una batteria di f.e.m. V e resistenza interna r. Calcolare la resistenza della combinazione, la corrente in ogni resistenza e la d.d.p. ai capi di ogni resistenza nei due casi:
a) $r = 0$;
b) $r = 10\ \Omega$.
[Dati numerici: $V = 9\ V$; $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 90\ \Omega$]

SOLUZIONE:

La resistenza R del parallelo è data da $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, per cui $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 47{,}3\ \Omega$

Nel caso che la resistenza interna della batteria sia nulla, questa è anche la resistenza totale del circuito.
La corrente in ogni resistenza si trova osservando che la caduta di potenziale ai capi delle due resistenze deve essere la stessa:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = V$$

e quindi

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = 0{,}09\ A \qquad I_2 = \frac{V}{R_2} = 0{,}10\ A$$

Considerando anche la resistenza interna della batteria, la resistenza del parallelo non cambia e la resistenza totale diventa

$$R + r = 57{,}3\ \Omega$$

La corrente I che entra nel parallelo è allora $I = \frac{V}{R + r}$

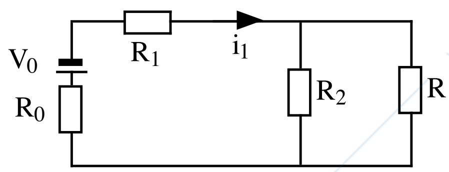
Si ottiene subito la d.d.p. ai capi del parallelo (e quindi delle due resistenze R_1 e R_2) da

$$V_{12} = V - rI = 7{,}4\ V$$

da cui

$$I_1 = \frac{V_{12}}{R_1} = 0{,}07\ A \qquad I_2 = \frac{V_{12}}{R_2} = 0{,}08\ A$$

Si consideri il circuito in figura. a) Per quale valore della resistenza R la potenza in essa dissipata è massima?b) Quanto vale, per il valore di R appena determinato, la corrente che circola in R_1?



[Dati numerici: $R_0 = 20W;R_1 = 30W;R_2 = 50W;V_0 = 120V$]

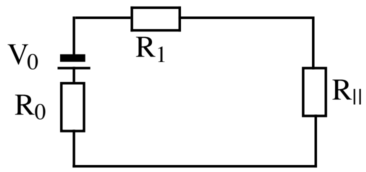
SOLUZIONE:

Per calcolare la potenza dissipata nella resistenza R occorre procurarsi il valore della corrente i che vi circola, oppure il valore della differenza di potenziale V ai suoi capi. La potenza sarà poi data da una dalle note espressioni

$$P = i^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Il calcolo di queste due grandezze può essere effettuato senza difficoltà ricorrendo ai principi di Kirchhoff.
Qui però seguiamo un metodo alternativo altrettanto semplice.

Il circuito proposto è equivalente a quello raffigurato a lato, dove si è indicato con $R_\parallel$ il parallelo di R e R_2:



$$R_\parallel = \frac{RR_2}{R + R_2}$$

La corrente i_1 che vi circola è

$$i_1 = \frac{V_0}{R_{tot}} = \frac{V_0}{R_0 + R_1 + R_\parallel} = \frac{V_0}{R_0 + R_1 + \dfrac{RR_2}{R + R_2}}$$

e la d.d.p. ai capi è $V = R_\parallel i_1$.
Poiché R e R_2 sono collegate in parallelo, questa è anche la d.d.p. ai capi di R.
La potenza dissipata in R è allora

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{R_\parallel^2 i_1^2}{R} = V_0^2 \frac{R_2^2 R}{\left[R(R_0 + R_1 + R_2) + R_2(R_0 + R_1)\right]^2}$$

Il massimo di questa funzione si trova al solito determinando il valore R_m di R che ne annulla la derivata prima e che risulta essere

$$R_m = \frac{R_2(R_0 + R_1)}{R_0 + R_1 + R_2} = 25 \quad \Omega$$

Naturalmente occorrerebbe anche controllare che la derivata seconda sia negativa.

Il calcolo della corrente che circola in R_1 è ora immediato: basta sostituire a R il valore R_m nell'espressione di i_1 sopra ricavata:

$$i_1 = 1{,}8\ A$$