082742 – Elettrotecnica (E-O)

Prof. F. Bizzarri

Esame, 16 Settembre 2015

Cognome ______________________ Nome ______________________

Matricola ______________________ Firma ______________________

AVVERTENZE

- La prova dura **3 ore**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a **16 punti** invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2.0 punti	E2a 3.0 punti	E2b 5.0 punti	E3a 4.0 punto	E3b 5.0 punti	E4a 6.0 punto	E4b 3.0 punto
Voto							

Voto Finale

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1

Discutere anche graficamente la relazione che lega, nel vuoto, il campo elettrico ed il campo magnetico generati da un carica elettrica q in moto non relativistico a velocità $\overline{v}$.

Vedere dispense del corso paragrafo 7.3

E2a

Per il doppio-bipolo in Figura 1 si ricavi la matrice di impedenze $\mathcal{Z}$ sapendo che evolve in regime sinusoidale a pulsazione ω.

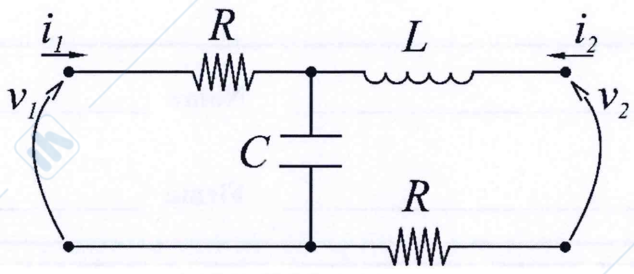

Figura 1

Prove semplici

a) $\bar{I}_1 = \bar{A}$, $\bar{I}_2 = \emptyset$

$$\bar{V}_1 = \underbrace{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}_{Z_{11}} \bar{A} \qquad \bar{V}_2 = \underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{Z_{21}} \bar{A}$$

b) $\bar{I}_2 = \bar{A}$ e $\bar{I}_1 = 0$

$$\bar{V}_2 = \underbrace{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}_{Z_{22}} \bar{A} \qquad \bar{V}_1 = \underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{Z_{12}} \bar{A}$$

$$Z = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

E2b

Per il circuito in Figura 2, che evolve in regime sinusoidale a pulsazione ω, si ricavi l'espressione della reattanza X tale che $\bar{v}_2 = k\,\bar{A}$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$.

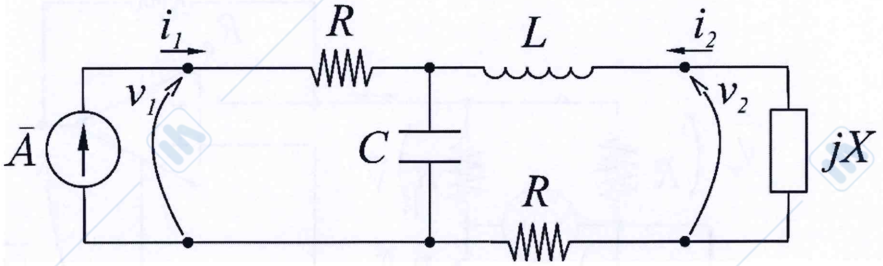

Figura 2

Si deve trovare X tale che $k = k(R, C, L, \omega) \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{j\omega C}\bar{A} + \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underbrace{\left(-\frac{\bar{V}_2}{jX}\right)}_{\bar{i}_2}$$

$$\bar{V}_2\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + jX\right) = \frac{jX}{j\omega C}\bar{A}$$

$$\bar{V}_2\,\frac{1 - \omega^2 LC - \omega CX + j\omega RC}{\cancel{j\omega C}} = \frac{jX}{\cancel{j\omega C}}\bar{A}$$

$$\bar{V}_2 = \frac{jX}{1 - \omega^2 LC - \omega CX + j\omega RC}\bar{A} = \hat{k}(R, C, L, \omega, X)\,\bar{A}$$

se $1 - \omega^2 LC - \omega CX = 0$ allora $\hat{k} = \dfrac{X}{\omega RC} \in \mathbb{R}^+$ se $X \neq 0$

$$\downarrow$$

$$X = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega C} \qquad k = \hat{k}\Big|_{X = \frac{1-\omega^2 LC}{\omega C}} = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega^2 RC^2}$$

E3a

Il circuito in Figura 3 evolve in regime sinusoidale con $e(t) = E\cos(\omega t)$. L'amplificatore operazionale è ideale e lavora in condizioni di massa virtuale. Si determini la corrente $i(t)$.

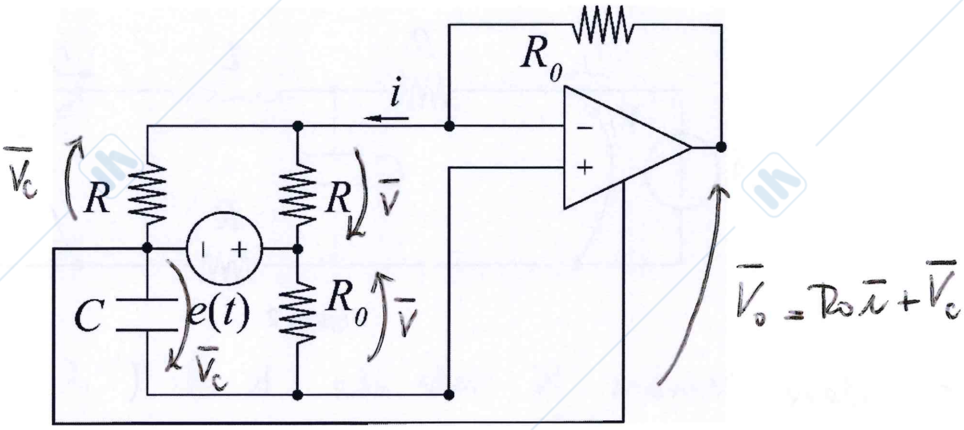

Figura 3

$e(t) = E\cos\omega t \longleftrightarrow E$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{V}}{R_0} = j\omega C\bar{V}_c \\ \bar{V} + \bar{V}_c = E \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{V} = j\omega R_0 \bar{V}_c C \\ (1 + j\omega R_0 C)\bar{V}_c = E \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{V} = \dfrac{j\omega R_0 C E}{1 + j\omega R_0 C} \\ \bar{V}_c = \dfrac{E}{1 + j\omega R_0 C} \end{cases}$$

$$\bar{i} = \frac{1}{R}\left(\bar{V}_c - \bar{V}\right) = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{1+j\omega R_0 C} - \frac{j\omega R_0 C}{1+j\omega R_0 C}\right) = \frac{E}{R}\,\frac{1 - j\omega R_0 C}{1 + j\omega R_0 C}$$

$$= \frac{E}{R}\,\frac{(1 - j\omega R_0 C)^2}{1 + (\omega R_0 C)^2} = \frac{E}{R}\,\frac{1 - (\omega R_0 C)^2 - 2j\omega R_0 C}{1 + (\omega R_0 C)^2}$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\bar{i}\, e^{j\omega t}\right\} = \frac{E}{R}\,\frac{1}{1 + (\omega R_0 C)^2}\left[\left(1 - (\omega R_0 C)^2\right)\cos\omega t + 2\omega R_0 C \sin\omega t\right]$$

E3b

Il circuito in Figura 3 evolve in regime sinusoidale con $e(t) = E\cos(\omega t)$. L'amplificatore operazionale è ideale e lavora in condizioni di massa virtuale. Si determini la potenza complessa assorbita dall'amplificatore operazionale.

$$\hat{P}^{AO}_{ASS} = \frac{1}{2}\bar{V}_0(-\bar{i})^* = \frac{1}{2}(R_0\bar{i} + \bar{V}_C)(-\bar{i})^* =$$

$$= -\frac{1}{2}R_0|\bar{i}|^2 - \frac{1}{2}\bar{V}_C\bar{i}^* =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(R_0\frac{E^2}{R^2} + \frac{E}{1+j\omega R_0C}\cdot\frac{E}{R}\frac{1+j\omega R_0C}{1-j\omega R_0C}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{E^2}{R^2}\left(R_0 + \frac{R}{1-j\omega R_0C}\right) = -\frac{1}{2}\frac{E^2}{R^2}\frac{R_0+R-j\omega R_0^2C}{1-j\omega R_0C}$$

E4a

Il circuito in Figura 4 si trova a regime per $t = 0^-$, essendo $a(t) = A$. In $t = 0$ il tasto si chiude. Si determinino l'equazione di stato che regola l'evoluzione del circuito per $t < 0$ e per $t > 0$ e l'espressione della corrente $i_L(t)$ per $t \geq 0$.

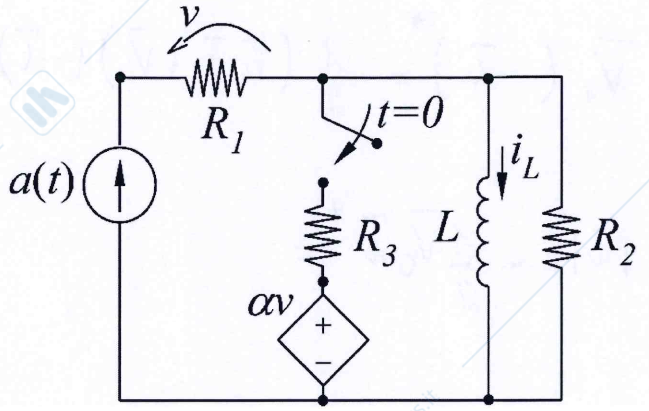

Figura 4

Per $t<0$ l'equazione di stato è

$$L\frac{di_L}{dt} = (a(t)-i_L)R_2 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{R_2}{L}i_L + \frac{R_2 a(t)}{L}$$

in $t=0^-$ regime stazionario $\rightarrow V_L = 0 \rightarrow i_L(0^-) = A$

in $t=0$ si chiude il tasto $\rightarrow$

$$a(t) = i_L + L\frac{di_L}{dt}\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\left(L\frac{di_L}{dt} - \alpha v\right)$$

$v = R_1 a(t)$

$$L\frac{di_L}{dt}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) = -i_L + a(t)\left(1+\alpha\frac{R_1}{R_3}\right)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_2R_3}{L(R_2+R_3)}\left(a(t)\left(1+\alpha\frac{R_1}{R_3}\right) - i_L\right)$$

a cavallo di $\emptyset$ l'ingresso rimane costante

ma l'equazione di stato nella forma

$$\frac{d}{dt} i_i(t) = \lambda(t)\left(a(t)h(t) - i_i\right) =$$
$$= \lambda(t)\left(Ah(t) - i_i\right)$$

vede $\lambda(t)$ discontinua tra 0^- e 0^+ (ma limitata)

e $h(t)$ idem.

$$\lambda(t) = \begin{cases} -\frac{R_2}{L}, & t<0 \\ \underbrace{-\frac{R_2R_3}{L(R_2+R_3)}}_{\lambda^+} & t<0 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{R_2}{L}, & t<0 \\ -\frac{R_2R_3}{L(R_2+R_3)}\left(1+\frac{\alpha R_1}{R_3}\right), & t>0 \end{cases}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{d}{dt} i_i(t)\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \left(\lambda(t)\left(Ah(t) - i_i(t)\right)\right) dt = \emptyset$$

$$i_i(0^+) = i_i(0^-) = A$$

$$i_i(t) = Ke^{\lambda^+ t} + H$$

$$0 = \frac{R_2R_3}{L(R_2+R_3)}\left(A\left(1+\frac{\alpha R_1}{R_3}\right) - H\right) \rightarrow H = A\left(1+\frac{\alpha R_1}{R_3}\right)$$

$$A = K + H \qquad K = A - A\left(1+\frac{\alpha R_1}{R_3}\right) = -A\frac{\alpha R_1}{R_3}$$

$$i_i(t)\Big|_{t\geq 0} = -A\frac{\alpha R_1}{R_3} e^{\lambda^+ t} + A\left(1+\frac{\alpha R_1}{R_3}\right)$$

E4b

Il circuito in Figura 4 si trova a regime per $t = 0^-$, essendo $a(t) = A$. In $t = 0$ il tasto si chiude. Si determini la potenza erogata dal generatore di corrente in per $t = 0^-$ e per $t > 0$.

$$t = 0^- \qquad P^{a(t)}_{erogata} = A \cdot V = A^2 R_1$$

$$t > 0 \qquad P^{a(t)}_{erogata} = A\left(V + L\frac{di_L}{dt}\right) =$$

$$= A\left(R_1 A + L\left(-A\frac{\alpha R_1}{R_3}\left(-\frac{R_2 R_3}{L(R_2+R_3)}e^{\lambda^+ t}\right)\right)\right) =$$

$$= A^2\left(R_1 + \frac{\alpha R_1 R_2}{L(R_2+R_3)}e^{\lambda^+ t}\right)$$