082742 – Elettrotecnica (E-O)

Prof. F. Bizzarri

Esame, 13 Luglio 2015

Cognome ____________________ **Nome** ____________________

Matricola ____________________ **Firma** ____________________

AVVERTENZE

- La prova dura **3 ore e mezza**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a **16 punti** invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2.0 punti	E2a 3.0 punti	E2b 5.0 punti	E3 9.0 punto	E4a 4.0 punti	E4b 5.0 punto
Voto						

Voto Finale

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1

Discutere similitudini e differenze tra il teorema di Gauss per il campo elettrico e il teorema di Gauss per il campo magnetico.

Si vedano i paragrafi 1.8 e 7.8 delle dispense del corso.

E2a

Per il circuito in Figura 1 si ricavi l'equazione di stato che ne governa la dinamica.

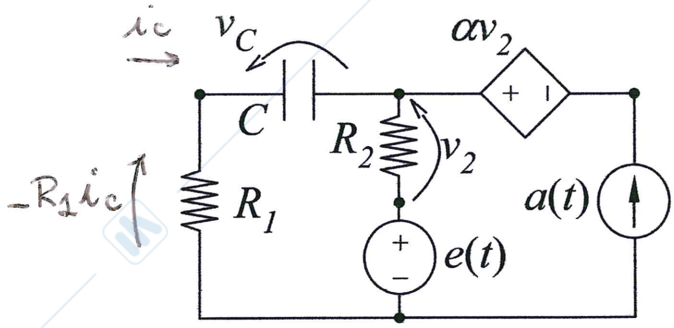


Figura 1

$$V_2 = -R_1 i_C - V_C - e(t)$$

$$C\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{R_2}\left(-R_1 i_C - V_C - e(t)\right) - a(t)$$

$$C\frac{dV_C}{dt}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = -\frac{V_C}{R_2} - \frac{e(t)}{R_2} - a(t)$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{R_2}{(R_1+R_2)C}\left(-\frac{V_C}{R_2} - \frac{e(t)}{R_2} - a(t)\right) =$$

$$= -\frac{1}{(R_1+R_2)C}\left(V_C + e(t) + a(t)R_2\right)$$

E2b

Per il circuito in Figura 1 si assumano $a(t) = A\cdot u(t)$, $e(t) = E\cdot u(-t)$ e, per $t = 0^-$, il circuito a regime. Si determini $v_2(0^-)$ e $v_2(t)$ per $t\in(0^+, +\infty)$. [Suggerimento: $u(t) = 0$ per $t < 0$ e $u(t) = 1$ per $t > 0$]

$$a(t) = A\,u(t) \begin{cases} 0, & t<0 \\ A, & t>0 \end{cases} \qquad e(t) = E\,u(-t) = \begin{cases} E, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$$

$$i_C = \frac{V_2}{R_2} - a(t)$$

$$-R_1\left(\frac{V_2}{R_2} - a(t)\right) - V_C - V_2 - e(t) = 0$$

$$V_2\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = -V_C - e(t) + R_1 a(t)$$ [vale per ogni t e quindi anche in 0^- e 0^+]

$$V_2 = -\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(V_C + e(t) - R_1 a(t)\right)$$

Non ci sono relazioni algebriche tra gli ingressi e $v_C(t)$.
Quindi V_C è variabile di stato e, con $e(t)$ e $a(t)$ discontinui ma limitati in 0, $V_C(0^-) = V_C(0^+)$

In $t = 0^-$ il circuito è a regime stazionario $\rightarrow V_C(0^-) = -E$

$V_C(0^+) = E$

$V_C(t) = k e^{\lambda t} + h$

$$\frac{d}{dt} h = -\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(h + R_2 A\right) \longrightarrow h = -R_2 A$$

$$V_C(0) = -E = k + h \qquad k = R_2 A - E$$

$$V_C(t) = (R_2A - E)e^{\lambda t} - R_2 A$$

$$V_2(t)\Big|_{t>0} = -\frac{R_2}{R_1+R_2}\left((R_2A-E)e^{\lambda t} - R_2A - R_1A\right) =$$

$$= -\frac{R_2}{R_1+R_2}\left((R_2A-E)e^{\lambda t} - (R_1+R_2)A\right)$$

$$V_2(0^+) = -\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(-E - R_1A\right) = \frac{R_2(E+R_1A)}{R_1+R_2}$$

$$V_2(0^-) = -\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(-E + E - R_1 \emptyset\right) = \emptyset$$

E3

Il circuito in Figura 2 evolve in regime sinusoidale con $e(t)$ = $E\cos(\omega t)$. Si determini la potenza istantanea erogata dal generatore indipendente di tensione. Si assuma $\alpha = 3/2$.

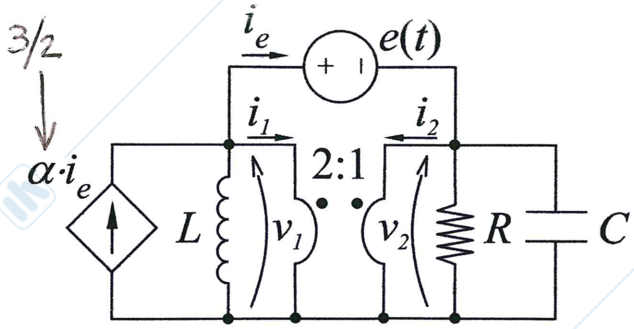


Figura 2

$V_1 = 2V_2 \qquad i_1 = -\frac{i_2}{2}$

$e(t) = E\cos\omega t \longleftrightarrow E$

$\begin{cases} \bar{V}_1 - E - \bar{V}_2 = 0 \\ \bar{V}_1 = 2\bar{V}_2 \end{cases} \qquad 2\bar{V}_2 - E - \bar{V}_2 = 0 \qquad \bar{V}_2 = E \qquad \bar{V}_1 = 2E$

$\begin{cases} \alpha \bar{i}_e = \frac{3}{2}\bar{i}_e = \bar{i}_e + \frac{2E}{j\omega L} + i_1 \\ \bar{i}_e = \bar{i}_2 + \frac{E}{R} + j\omega CE \\ \bar{i}_2 = -2 i_1 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}\bar{i}_e = \frac{2E}{j\omega L} + i_1$

$\bar{i}_2 = \bar{i}_e - \frac{E}{R} - j\omega CE$

$\bar{i}_1 = -\frac{1}{2}\left(\bar{i}_e - \frac{E}{R} - j\omega CE\right)$

$\frac{1}{2}\bar{i}_e = \frac{2E}{j\omega L} - \frac{1}{2}\left(\bar{i}_e - \frac{E}{R} - j\omega CE\right)$

$\bar{i}_e = \frac{2E}{j\omega L} + \frac{E}{2R} + \frac{j\omega CE}{2} = \frac{1}{2}E\left(\frac{4}{j\omega L} + \frac{1}{R} + j\omega C\right)$

$$i_e(t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2} E \left(\frac{1}{R} - j\,\frac{4-\omega^2 CL}{\omega L} \right) e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= \frac{E}{2}\left(\frac{1}{R}\cos\omega t + \frac{4-\omega^2 LC}{\omega L}\,\mathrm{sen}\,\omega t \right)$$

$$P^{e}_{ist_{erog}} = -\,e(t)\,i_e(t) = -\,E\cos\omega t \cdot i_e(t)$$

E4a

Per il doppio-bipolo lineare affine in Figura 3 si ricavino i parametri della rappresentazione equivalente Thevénin con matrice [R] e vettore delle tensioni [E].

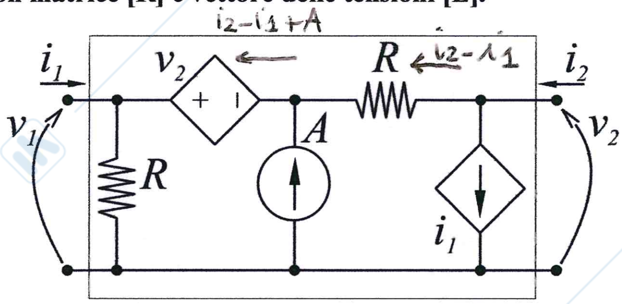


Figura 3

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

R_{12} e $R_{11} = \varnothing$

$$\cancel{i_1} + i_2 - \cancel{i_1} + A = \frac{V_1}{R} \quad \rightarrow \quad V_1 = \overline{R}\,i_2 + \underbrace{AR}_{E_1}$$

$$V_1 - V_2 + R(i_2 - i_1) - V_2 = 0$$

$$2V_2 = R i_2 + AR + R(i_2 - i_1)$$

$$= -R i_1 + 2R i_2 + AR$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{R}{2}}_{R_{21}} i_1 + \overbrace{R}^{R_{22}} i_2 + \underbrace{\frac{AR}{2}}_{E_2}$$

E4b

Il circuito in Figura 4 è ottenuto passivando la sorgente interna del doppio-bipolo lineare affine in Figura 3 e collegando alle porte un generatore di corrente *a*(*t*) = *A₀*cos(ω*t*), un condensatore e un bipolo b. Il circuito evolve in regime sinusoidale e b si comporta come l'impedenza *Z* = *R₀*+j*X₀*. Determinare il rapporto R₀/X₀ quando Z è tale da garantire il massimo trasferimento di potenza attiva da a al bipolo b.

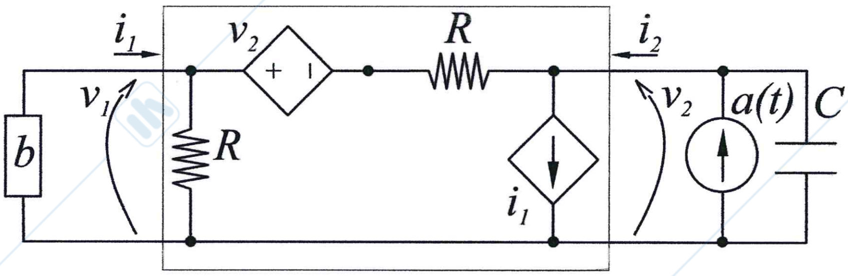
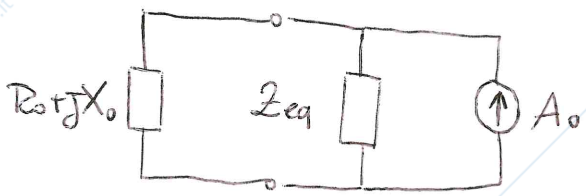


Figura 4



Z_{eq} si trova passivando $a(t)$ e imponendo $\bar{i}_1$!

$$Z_{eq} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{i}_1}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = R\bar{i}_2 \\ \bar{V}_2 = -\frac{R}{2}\bar{i}_1 + R\bar{i}_2 = -\frac{\bar{i}_2}{j\omega C} \end{cases}$$

$$\bar{I}_2\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)=\frac{R}{2}\bar{I}_1$$

$$\bar{I}_2=\frac{j\omega RC}{2(1+j\omega RC)}\bar{I}_1$$

$$\bar{V}_1=R\bar{I}_2=\frac{j\omega R^2C}{2(1+j\omega RC)}\bar{I}_1=$$

$$=\frac{j(\omega R^2C)(1-j\omega RC)}{2(1+\omega^2R^2C^2)}\bar{I}_1$$

$$Z_{eq}=\underbrace{\frac{\omega R^2C}{2(1+\omega^2R^2C^2)}}_{\alpha}(\omega RC+j)$$

per avere massimo trasf. potenza attiva:

$$Z^*=(R_0+jX_0)^*=R_0-jX_0=Z_{eq}$$

$$\begin{cases}R_0=\alpha\omega RC\\-X_0=\alpha\end{cases}\qquad R_0/X_0=-\omega RC$$