



082742 – Elettrotecnica (E-O) Seconda prova in itinere, 3 Luglio 2012

Prof. F. Bizzarri

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____ Firma _____

AVVERTENZE

- La prova dura 2 ore
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a 8 punti invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2.0 punti	E2a 3.0 punto	E2b 1.0 punti	E2c 1.0 punto	E2d 1.0 punto	E3a 4.0 punto	E3b 2.0 punto	Voto Finale
Voto								

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1

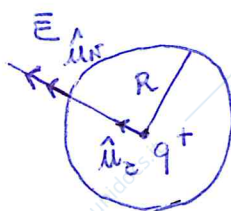
Enunciare la formulazione generale del teorema di Gauss per il campo elettrico e verificarlo nel caso di una carica positiva e puntiforme q posta, nel vuoto, al centro di una sfera di raggio R .

Il flusso del campo elettrico \vec{E} attraverso una superficie S chiusa che racchiude le q cariche q_1, q_2, \dots, q_N è

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

dove $q = \sum_{k=1}^N q_k$ e \hat{u}_N è il vettore normale ad S in

ogni suo punto (x, y, z) . \hat{u}_N è orientato secondo la regola della mano dx dopo aver scelto l'orientamento del bordo della superficie.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

$$\int_{\text{sfera}} \vec{E} \cdot \hat{u}_N dS = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_N dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \int \frac{dS}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E2a

Per il circuito in Figura 1, per il quale si assume $\alpha \neq 1$, si determini la rappresentazione con matrice $[R]$ del doppio bipolo racchiuso nel box tratteggiato.

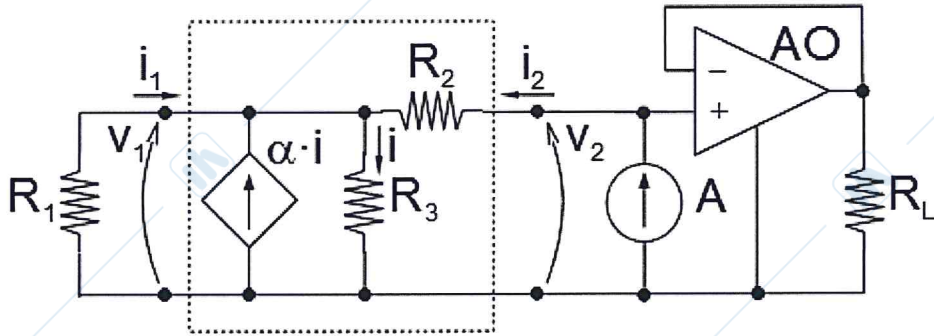


Figura 1

$$\begin{aligned} i_1 &= 0 \\ i_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ V_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

$$i_2 = i - \alpha i = (1 - \alpha) i \quad i = \frac{i_2}{1 - \alpha}$$

$$V_2 = R_{22} i_2 = R_2 i_2 + R_3 i = \left(R_2 + \frac{R_3}{1 - \alpha} \right) i_2$$

$$R_{22} = \frac{R_3}{1 - \alpha} + R_2$$

$$V_1 = R_{12} i_2 = R_3 i = \frac{R_3}{1 - \alpha} i_2 \quad R_{12} = \frac{R_3}{1 - \alpha}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= 0 \\ i_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$i_1 = i - \alpha i = (1 - \alpha) i \quad i = \frac{i_1}{1 - \alpha}$$

$$V_1 = R_{11} i_1 = R_3 i = \frac{R_3}{1 - \alpha} i_1 \quad R_{11} = \frac{R_3}{1 - \alpha}$$

$$V_2 = R_{21} i_1 = R_3 i \quad R_{21} = \frac{R_3}{1 - \alpha}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{R_3}{1 - \alpha} & \frac{R_3}{1 - \alpha} \\ \frac{R_3}{1 - \alpha} & \frac{R_3}{1 - \alpha} + R_2 \end{bmatrix}$$

E2b

Per quale valore di R_2 il doppio bipolo racchiuso nel box tratteggiato in Figura 1 non ammette la rappresentazione mediante matrice $[G]$? Giustificare la risposta.

$[G]$, se esiste, è l'inversa di $[R]$

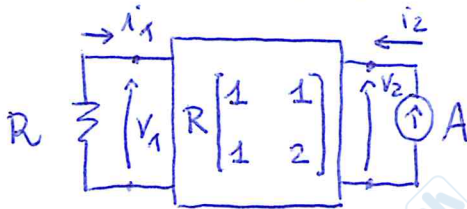
$[R]^{-1}$ esiste se $\det [R] \neq 0$ Nel caso $R_2 = 0 \rightarrow \det [R] = 0$

Topologicamente: Se $R_2 = 0 \rightarrow V_1 = V_2 \rightarrow$

\rightarrow non esiste base funzionale \rightarrow non esiste $[G]$

E2c

Per $\alpha = 0$ e $R_1 = R_2 = R_3 = R$, determinare il valore della tensione v_2 .



$$-Ri_1 = V_1 = R(i_1 + i_2)$$

$$i_1 = -\frac{i_2}{2} = -\frac{A}{2}$$

$$V_2 = R(i_1 + 2i_2) = R\left(-\frac{1}{2} + 2\right)i_2 = \frac{3}{2}RA$$

E2d

L'amplificatore operazionale AO può essere considerato ideale se eroga complessivamente una potenza istantanea $P \leq 1W$. Si assumano $\alpha = 0$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1k\Omega$ e $A = (2/3)mA$. Quale valore minimo può assumere R_L affinché AO possa essere considerato ideale?

$$P^{(e)} = \frac{V_2^2}{R_L} = \frac{1}{R_L} \left(\frac{2}{3} \cdot 1k\Omega \cdot \frac{2}{3} mA \right)^2 = \frac{1}{R_L} \cdot 1V^2 \leq 1W$$

$$R_L \geq 1\Omega$$

E3a

Il circuito in Figura 2 evolve in regime PERIODICO con $e(t)=E \cdot \sin(\omega t)$ ed $a(t)=A \cdot \cos(2\omega t)$. Si assuma $n^2 \neq 4\omega^2 LC$ e $n^2 \neq \omega^2 LC$. Determinare $i_L(t)$.

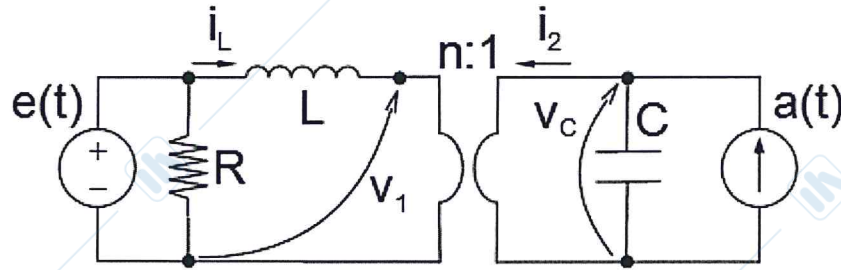
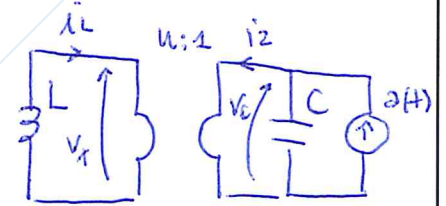


Figura 2

$e(t) \equiv 0$

$$\bar{V}_1 = n \bar{V}_c \quad \text{e} \quad \bar{i}_L = -\frac{1}{n} \bar{i}_2 \quad \bar{i}_2 = -n \bar{i}_L$$



$$-j2\omega L \bar{i}_L = \bar{V}_1 = n \bar{V}_c = n \frac{1}{j2\omega C} (A - \bar{i}_2)$$

$$-j2\omega L \bar{i}_L = \frac{n}{j2\omega C} (A + n \bar{i}_L) \quad \left(\frac{4\omega^2 LC}{n} - n \right) \bar{i}_L = A$$

$$\bar{i}_L = \frac{n}{4\omega^2 LC - n^2} A \quad i_L(t) = \frac{nA}{4\omega^2 LC - n^2} \cdot \cos(2\omega t)$$

$a(t) \equiv 0 \quad \bar{E} = -jE$

$$\bar{V}_c = -\frac{1}{j\omega C} \bar{i}_2 \quad \bar{i}_2 = -j\omega C \bar{V}_c \quad \bar{i}_L = -\frac{1}{n} \bar{i}_2 \quad \bar{V}_1 = n \bar{V}_c$$

$$\bar{E} - j\omega L \bar{i}_L - \bar{V}_1 = 0 \quad \bar{E} - j\omega L \bar{i}_L - n \left(-\frac{1}{j\omega C} \cdot (-n) \bar{i}_L \right) = 0$$

$$\left(j\omega L + \frac{n^2}{j\omega C} \right) \bar{i}_L = \bar{E} \quad \left(\frac{n^2 - \omega^2 LC}{j\omega C} \right) \bar{i}_L = \bar{E}$$

$$\bar{i}_L = \frac{-jE \cdot j\omega C}{\omega^2 - \omega^2 LC} = \frac{\omega CE}{\omega^2 - \omega^2 LC} \quad i_L(t) = \frac{\omega CE}{\omega^2 - \omega^2 LC} \cos \omega t$$

E3b

Per il circuito di Figura 2, assumendo $a(t)=0$, $n^2 - \omega^2 LC = 1$ e il regime sinusoidale raggiunto, si calcolino le potenze REATTIVE Q_L e Q_C ASSORBITE da L e C, rispettivamente.

$$\bar{v}_L = \omega CE$$

$$\begin{aligned} Q_L &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \bar{v}_L \bar{i}_L^* \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} j\omega L |\bar{i}_L|^2 \right\} = \\ &= \frac{\omega L}{2} \cdot (\omega CE)^2 = \frac{\omega^3 LC^2 E^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_C &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \bar{v}_C \bar{i}_C^* \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega C} |\bar{i}_C|^2 \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\omega C} \cdot |\bar{i}_C|^2 \end{aligned}$$

$$\bar{i}_C = + \bar{i}_L n = n \omega CE$$

$$Q_C = -\frac{1}{2\omega C} \cdot n^2 \omega^2 C^2 E^2 = -\frac{n^2 \omega C E^2}{2}$$