POLITECNICO MILANO

Elettrotecnica (082742 – 082748 – 097245)

Esame, 22 Febbraio 2019

Proff. Bizzarri, Codecasa, Gruosso, Maffezzoni, Pignari

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero Progressivo** ______________

AVVERTENZE

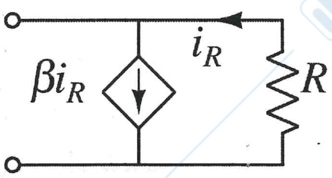
- **La prova dura 2 ore.**
- **Le domande D1 – D7 a risposta multipla <u>hanno ciascuna una sola risposta esatta</u> (+2/–1/0 punti per ogni risposta giusta/errata/senza risposta).**
- **Gli studenti iscritti al corso 097245 (9CFU) non dovranno rispondere al quesito D7 e il punteggio conseguito complessivamente sarà rinormalizzato a 32.**
- **Sono da svolgersi E1 ed E2 ed <u>uno solo a scelta</u> tra E3 e E4. Qualora lo studente li svolgesse entrambi sarà valutato solo E3.**
- **I punteggi massimi complessivi per ogni quesito sono riportati nella tabella sottostante; <u>un punteggio inferiore a 16 invalida la prova.</u>**

Esercizio	D1 – D7 14 punti	E1 6 punti	E2 6 punti	E3/E4 6 punti				Voto Finale
Voto								

D1	Il legame costitutivo (V, I) di un bipolo è dato nella forma implicita $aV + bI + c = 0$, con $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. Si può affermare che	
	il bipolo è passivo	☐
	il bipolo è controllabile in corrente	☒
	il bipolo è controllabile in tensione	☐

D2	La pulsazione di risonanza di un bipolo che opera in regime sinusoidale è definita come	
	la pulsazione della sorgente di comando del bipolo	☐
	la pulsazione alla quale la reattanza del bipolo risulta uguale a zero	☒
	la pulsazione alla quale la conduttanza del bipolo risulta uguale a zero	☐

D3 **Riferendosi al circuito in figura, quanto vale la conduttanza equivalente ai morsetti?**



	$G_{eq} = \dfrac{1}{R}$	☐
	$G_{eq} = \dfrac{1-\beta}{R}$	☒
	$G_{eq} = \dfrac{R}{1+\beta}$	☐

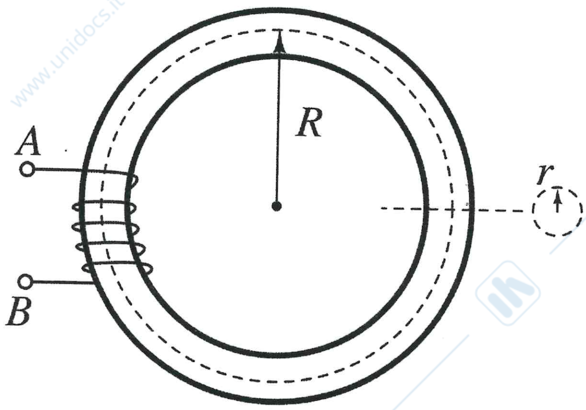
D4 **Se $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$ sono le grandezze rispettivamente alla porta 1 ed alla porta 2 di un doppio bipolo studiato con la convenzione degli utilizzatori, allora la potenza assorbita dal doppio bipolo vale**

$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$	☒
$p = v_1 i_1 - v_2 i_2$	☐
$p = v_1 i_2 + v_2 i_1$	☐

D5 **Un circuito lineare contiene N sorgenti sinusoidali con pulsazioni diverse. La soluzione di regime**

si ottiene mediante sovrapposizione degli effetti sommando le N soluzioni nel dominio dei fasori.	☐
si ottiene mediante sovrapposizione degli effetti sommando le N soluzioni nel dominio del tempo.	☒
non dipende dalle pulsazioni delle sorgenti.	☐

D6 **Il toro in figura ha raggi *r*<<*R*. Il numero di avvolgimenti è *n* e l'induttanza ai morsetti *A* e *B* è *L*. La permeabilità magnetica del toro è quindi approssimativamente**



$\mu = \frac{n^2 R L}{2r^2}$	☐
$\mu = \frac{2rL}{nR^2}$	☐
$\mu = \frac{2RL}{n^2 r^2}$	☒

D7 Nel vuoto, quali delle seguenti relazioni è compatibile con la legge di Gauss?

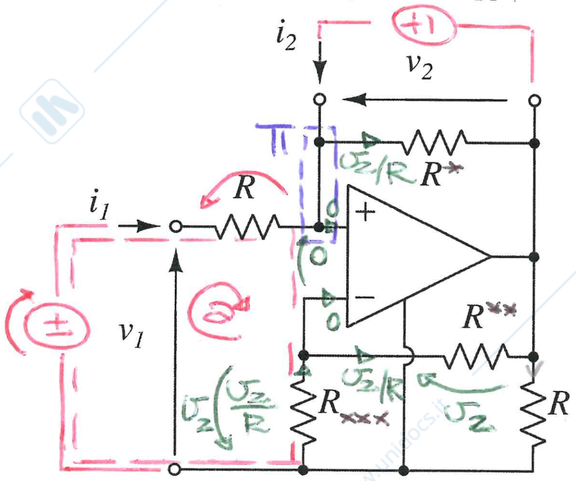
$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S}$	☐
$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$	☐
$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	☒

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio.

E1

Il doppio bipolo in figura opera in regime stazionario (DC) e contiene un operazionale ideale.

- **Si determinino i parametri della rappresentazione G (controllata in tensione).**
- **Dire se esiste, giustificando opportunamente la risposta, la rappresentazione R (controllata in corrente).**



Analizzando il circuito si può osservare che la tensione v_2 insiste su R^* e R^{**}. In ambo le resistenze circola la corrente $\frac{v_2}{R}$.
Poiché $I_-=0$, la corrente $\frac{v_2}{R}$ circola anche in R^{***}, dando luogo alla tensione v_2...

KVL maglia ⓐ: $v_1 - Ri_1 + v_2 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R}$

KCL supernodo Π: $i_1 + i_2 - \frac{v_2}{R} = 0$

$$\frac{v_1}{R} + \cancel{\frac{v_2}{R}} + i_2 - \cancel{\frac{v_2}{R}} = 0 \rightarrow i_2 = -\frac{v_1}{R}$$

Ottengo quindi: $$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matrice } G} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{i} = \underline{\underline{G}}\,\underline{v}$$

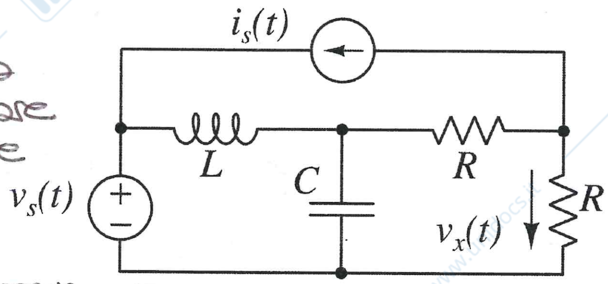
È possibile passare alla formulazione R (controllo in corrente) sse $\det G \neq 0$.
Infatti: $\underline{i} = \underline{\underline{G}}\,\underline{v} \longrightarrow \underline{v} = \underline{\underline{G}}^{-1}\underline{i} = \underline{\underline{R}}\,\underline{i}$, che esiste sse $\det G \neq 0$ (matrice invertibile...)

$\det G = 0 + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R^2} \neq 0 \longrightarrow \exists$ la rappresentazione R.

$$P^e_{A_0}\Big|_{\substack{V_1=1\\V_2=2}} = +2V_2\left[i_1 + \frac{V_2}{R} + \frac{2V_2}{R}\right] = 4\left[\frac{1}{R} + \frac{2}{R} + \frac{2}{R} + \frac{4}{R}\right] \cdot \frac{4}{R} \cdot 9 = \frac{36}{R}$$

E2

Il circuito ha una sorgente costante ed una sinusoidale. Sapendo che $R = 5[\Omega]$, $C = 0.4[\mathrm{mF}]$, $L = 8[\mathrm{mH}]$, $v_s = 6[\mathrm{V}]$ e $i_s = 2\cos(500t + 45°)[\mathrm{A}]$, determinare la tensione $v_x(t)$ di regime. <u>Svolgere l'esercizio utilizzando i valori numerici assegnati ai parametri del circuito</u>.

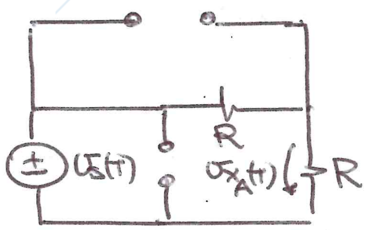


Il circuito ha una sorgente sinusoidale ~~[illegible]~~ ed una costante. È opportuno ricavare $v_x(t)$ con la sovrapposizione degli effetti.

$v_x(t) = v_{x_A}(t) + v_{x_B}(t)$

(A) → v_s ON, i_s OFF
(B) → v_s OFF, i_s ON
} a ciascun caso è associato un regime diverso...

$\boxed{\text{CASO A}}$: Rete DC a regime



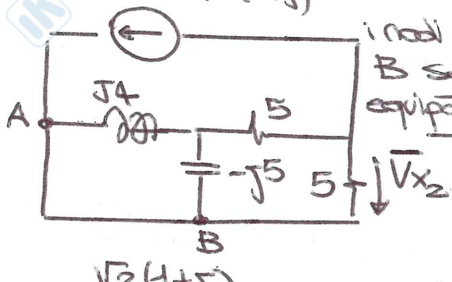
$v_{x_A}(t) = -v_s(t)\frac{R}{R+R} = -\frac{v_s(t)}{2} = -3V$

$\boxed{\text{CASO B}}$: Rete AC a regime (analisi fasoriale)

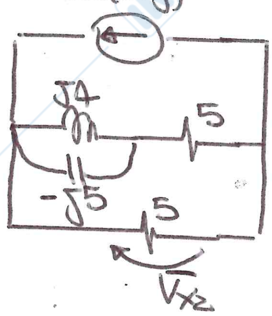
$\bar{I}_s = 2e^{j45°} = \frac{2\sqrt{2}}{2}(1+j) = \sqrt{2}(1+j)$ A

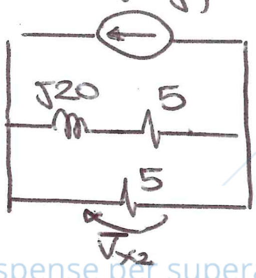
$\omega = 500$ rad/s $\rightarrow$ $jX_L = j\omega L = j4\,\Omega$

$jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j5\,\Omega$



i nodi A e B sono equipotenziali →





$$\frac{j4\cdot(-j5)}{j4-j5} = \frac{20}{-j} = +j20$$

$$\overline{V}_{x_B} = 5\sqrt{2}(1+j)\,\frac{j20+5}{10+j20} = \cancel{5}\sqrt{2}(1+j)\,\frac{5(1+j4)}{2\cancel{10}(1+j2)} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2}\,\frac{(-3+j5)}{\cancel{5}}(1-j2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-3+10+j5+j6) = \frac{\sqrt{2}}{2}(7+j11)$$

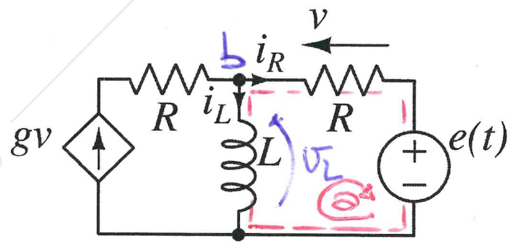
$$v_{x_B}(t) = Re\left\{\overline{V}_{x_2}e^{j\omega t}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(7\cos(500t) - 11\,sen(500t)\right)\ [V]$$

$$v_x(t) = v_{x_A}(t) + v_{x_B}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(7\cos(500t) - 11\,sen(500t)\right) - 3\ [V]$$

E3

Sapendo che $i_L(0) = 0$, $e(t) = E[V]$ per $t \leq 1[s]$ e che $e(t) = 0$ per $t > 1[s]$

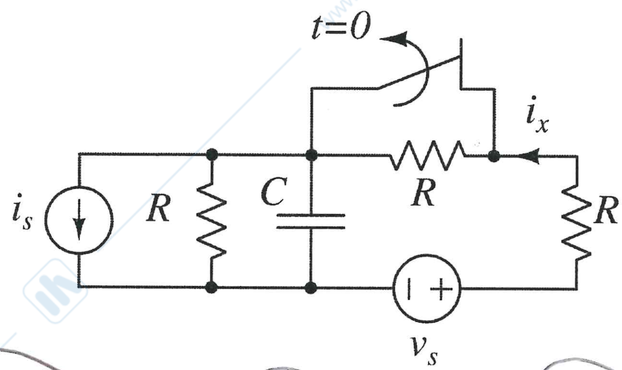
- determinare i valori di g tali che il circuito sia asintoticamente stabile;
- determinare $i_R(t)$ per $t \geq 0$.



E4

L'interruttore è chiuso da lungo tempo e <u>si apre</u> in $t = 0$. Sapendo che $R = 5[\Omega]$, $C = 300[\mu F]$, $i_s = 6[A]$ e $v_s = 30[V]$,

- determinare $i_x(0^-)$;
- determinare $i_x(t)$ per $t > 0$;
- disegnare il grafico di $i_x(t)$ per $t > 0$.



Sol ES3

KVL maglia ⓐ $v_L - v - e(t) = 0 \to \boxed{v = v_L - e(t)}$ ⇝ $i_R = \frac{v}{R}$

KCL nodo ⓑ $gv = i_L + \frac{v}{R} \to v\left(\frac{gR-1}{R}\right) = i_L \to v_L - e(t) = \frac{R}{gR-1} i_L$

ottengo quindi: $\frac{di_L(t)}{dt} = \underbrace{\frac{R}{L(gR-1)}}_{\lambda} i_L(t) + \underbrace{\frac{e(t)}{L}}_{u(t)}$ (eq di stato)

Il circuito è asintoticamente stabile sse $\lambda < 0 \to L(gR-1) < 0 \to \boxed{g < \frac{1}{R}}$

Per ricavare i_R, devo prima determinare $i_L(t)$ ...

$\underline{0 < t \leq 1s}$

$e(t) = E$ ... se $u(t) =$ cost $i_{Lp_1}(t) =$ cost $= a \to \overset{=0}{\cancel{\frac{da}{dt}}} = \frac{R}{\cancel{L}(gR-1)} a + \frac{E}{\cancel{L}}$

$a = -\frac{E(gR-1)}{R} = i_{Lp_1}$

$i_L(t) = K_1 e^{\lambda t} + i_{Lp_1}$

$i_L(0) = 0 = K_1 + i_{Lp_1} \to K_1 = -i_{Lp_1} = \frac{E(gR-1)}{R}$

ottengo quindi:

$i_L(t) = \frac{E(gR-1)}{R}\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}t} - 1\right)$ [A], $0 < t \leq 1s$.

In particolare, in $t = 1s^-$ ottengo:

$$i_L(1^-) = \frac{E(gR-1)}{R}\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}} - 1\right) = i_{L_1}$$

<u>$t > 1s$</u>

$e(t) = 0 \longrightarrow$ con passaggi analoghi alla sezione precedente si ottiene che $i_{Lp_2} = 0$.

$$i_L(t) = K_2 e^{\lambda(t-\bar{t})} + \underbrace{\cancel{i_{Lp_2}}}_{=0}$$

$\bar{t} = 1s \dots$

Vale la continuità della variabile di stato $i_L \longrightarrow \begin{cases} \lambda \text{ non varia tra } 1^- \text{ e } 1^+ \\ v_L(t) \text{ ha un salto limitato tra } 1^- \text{ e } 1^+ \dots \end{cases}$

$$i_L(1^+) = i_L(1^-)$$

$$i_L(1^-) = K_2 = i_{L_1}$$

ottengo quindi: $i_L(t) = \frac{E(gR-1)}{R}\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}} - 1\right) e^{\frac{R}{L(gR-1)}(t-1)}$, $t > 1s$.

Nel complesso:

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{E(gR-1)}{R}\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}t} - 1\right), & 0 < t \leq 1s \\ \frac{E(gR-1)}{R}\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}} - 1\right) e^{\frac{R}{L(gR-1)}(t-1)}, & t > 1s. \end{cases} \quad [A]$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = \begin{cases} E e^{\frac{R}{L(gR-1)}t}, & 0 < t \leq 1s \\ E\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}} - 1\right) e^{\frac{R}{L(gR-1)}(t-1)}, & t > 1s \end{cases} \quad [V]$$

Calcolo infine $i_R(t)$

$$i_R(t) = \frac{v}{R} = \frac{v_L}{R} - \frac{e(t)}{R} = \begin{cases} \frac{E}{R}\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}t} - 1\right), & 0 < t \leq 1s \\ \frac{E}{R}\left(e^{\frac{R}{L(gR-1)}} - 1\right) e^{\frac{R}{L(gR-1)}(t-1)}, & t > 1s \end{cases} \quad [A]$$

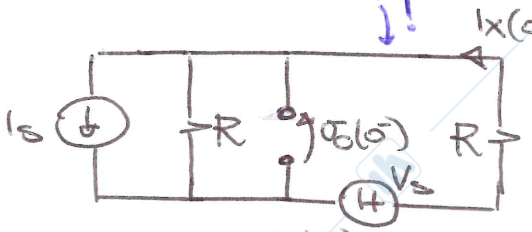
NB: $e(t) = 0$ $t > 1s$
$= E$ $0 < t \leq 1s$

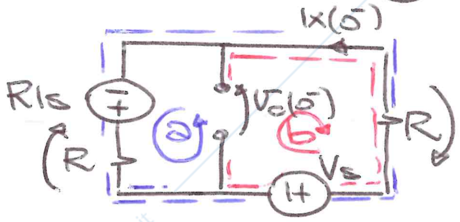
SOL ES 1

Analizzo il circuito in $t=0^-$ e in $t>0$ ....

$t=0^-$ → R in parallelo ad un diodo. Rete a regime... $\dashv\vdash$ → $\vdots\ v_c(0^-)$

$\Downarrow$!





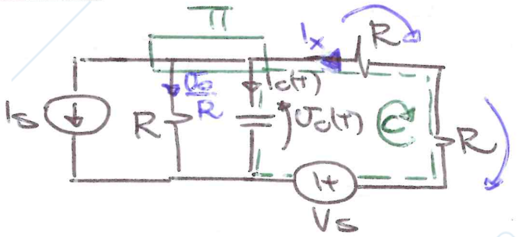
⤳ $RI_s - 2RI_x(0^-) + V_s = 0$ (maglia ⓐ)

$$I_x(0^-) = \frac{V_s + RI_s}{2R} = 6A$$

$$v_c(0^-) = V_s - RI_x(0^-) = \frac{V_s - RI_s}{2R} = 0V...$$

(maglia ⓑ)

$t>0$



$$\boxed{I_x = \frac{v_s - v_c}{2R}} \text{ (maglia ⓒ)}$$

KCL supernodo Π : $I_s + \frac{v_c}{R} + I_c - I_x = 0$

↓

$$C\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{R} - \frac{v_c}{2R} + \frac{v_s}{2R} - I_s$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \underbrace{-\frac{3}{2CR}}_{\lambda<0...}v_c(t) + \underbrace{\frac{v_s - 2RI_s}{2RC}}_{u(t)} \rightarrow \text{eq di stato}$$

stabilità asintotica

Ricavo v_{cp} → poiché $u(t)$ = costante, $v_{cp}(t) = \text{cost} = a$

$$\underbrace{\cancel{\frac{da}{dt}}}_{=0} = -\frac{3}{2CR}a + \frac{v_s - 2RI_s}{2RC} \rightarrow a = v_{cp} = \frac{v_s - 2RI_s}{3} = -10$$

$v_c(t) = Ke^{\lambda t} + v_{cp}$ ... poiché λ e $u(t)$ variano in modo limitato tra $t=0^-$ e 0^+, allora vale la continuità della variabile di stato $v_c(t)$.

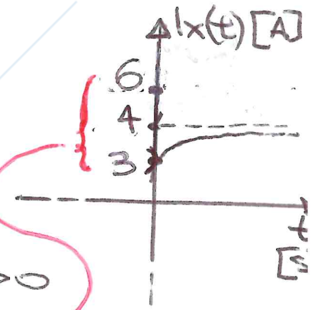
$v_c(0^-) = v_c(0^+)$

$v_c(0^-) = K + v_{cp}$ → $K = \underbrace{\cancel{v_c(0^-)}}_{=0} - v_{cp} = +10V.$

Ottengo quindi:

$$v_c(t) = v_{cp}\left(-e^{-\frac{3}{2CR}t} + 1\right) = 10\left(e^{-1000t} - 1\right) \quad , t>0$$

$$I_x(t) \ [A] = \begin{cases} 6 \ [A], & t=0^- \\ \frac{v_s - v_c}{2R} = 3 - 1e^{-1000t} + 1 = 4 - 1e^{-1000t} \ [A], & t>0 \end{cases}$$



discontinuità tra 0^- e 0^+ d'attendersi, I_x non è variabile di stato....