L’autoinduttanza

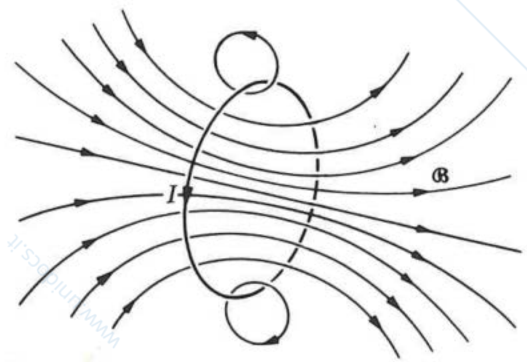
Se consideriamo una spira i contributi infinitesimi si sommano e …

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\widehat{u}_T \times \widehat{u}_r}{r^2} dl$$

è l’espressione del campo magnetico prodotto dalla corrente costante che circola nella spira in ogni punto dello spazio.

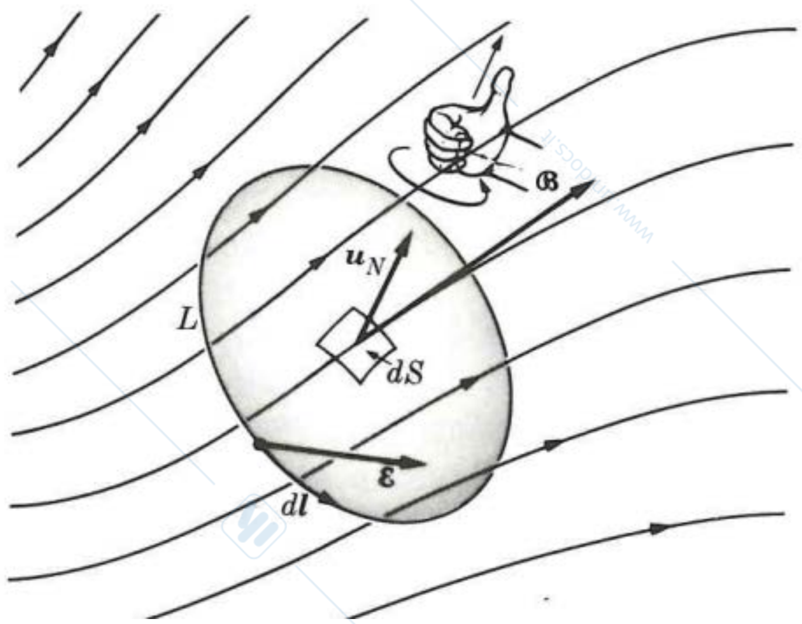
$$d\bar{B} = K_m I \frac{dl}{r^2} \widehat{u}_T \times \widehat{u}_r$$

La legge di Ampere-Laplace



Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. **Giovanni Ghione** al Politecnico di Milano

L’autoinduttanza



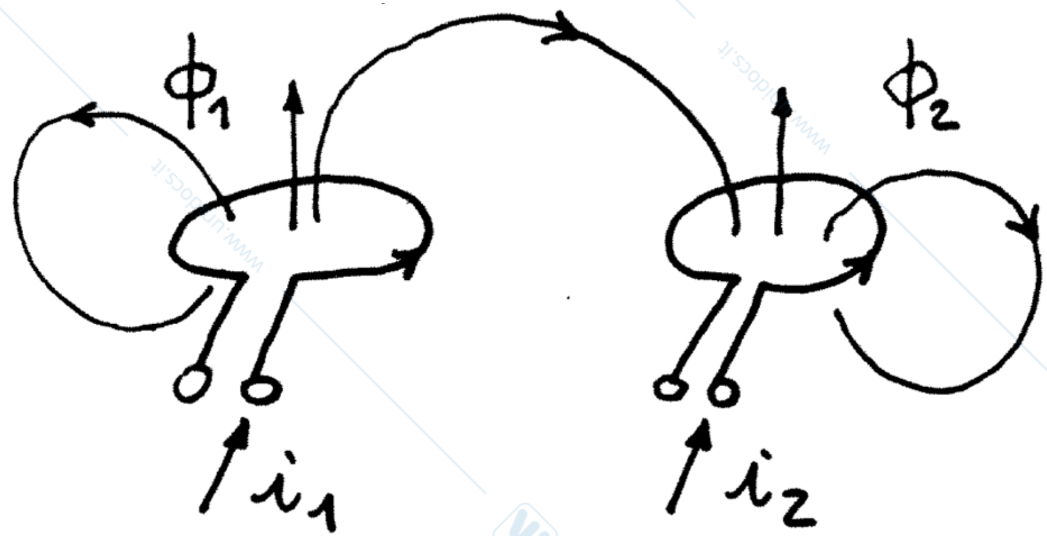
$$\Phi_B(I) = \int_S \bar{B} \cdot \widehat{u}_N dS =$$
$$= \int_S \left[\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\widehat{u}_T \times \widehat{u}_r}{r^2} dl \right] \cdot \widehat{u}_N dS =$$
$$= \underbrace{\int_S \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\widehat{u}_T \times \widehat{u}_r}{r^2} dl \right] \cdot \widehat{u}_N dS}_{L} \, I =$$
$$= LI$$

L’autoinduttanza è un parametro geometrico positivo dato che

$$\widehat{u}_N \cdot d\bar{B} > 0$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

La mutua induzione



Se il mezzo circostante è lineare: $\Phi_1 = L_{11} i_1 + L_m i_2$

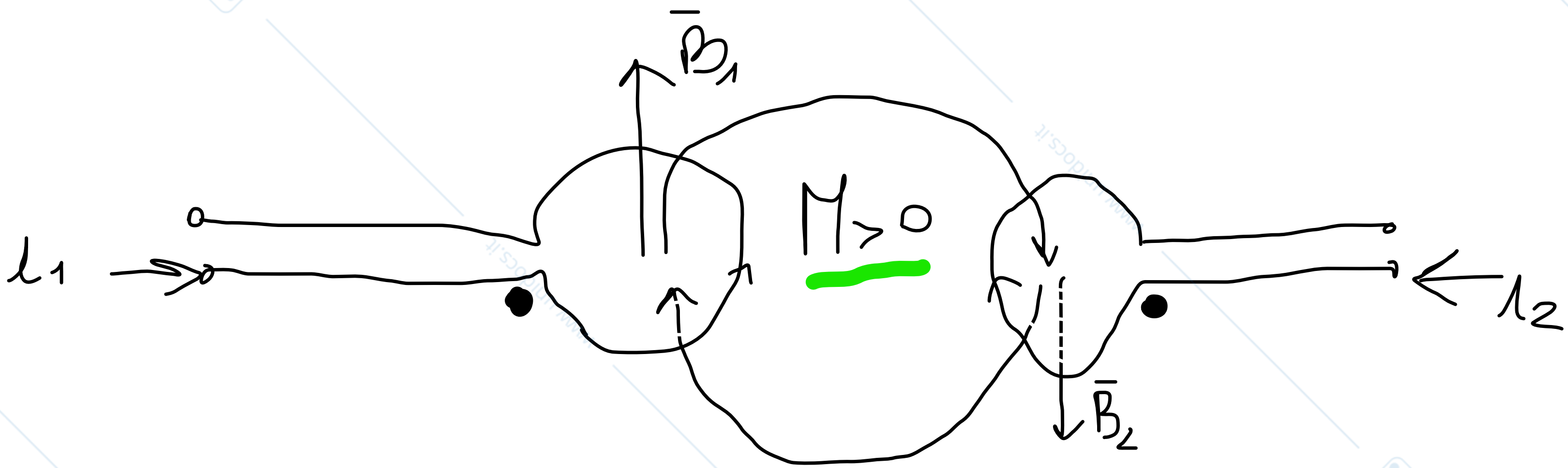
$L_m \equiv M$

Induttanza mutua

E analogamente
(vale la reciprocità) $\Phi_2 = L_m i_1 + L_{22} i_2$

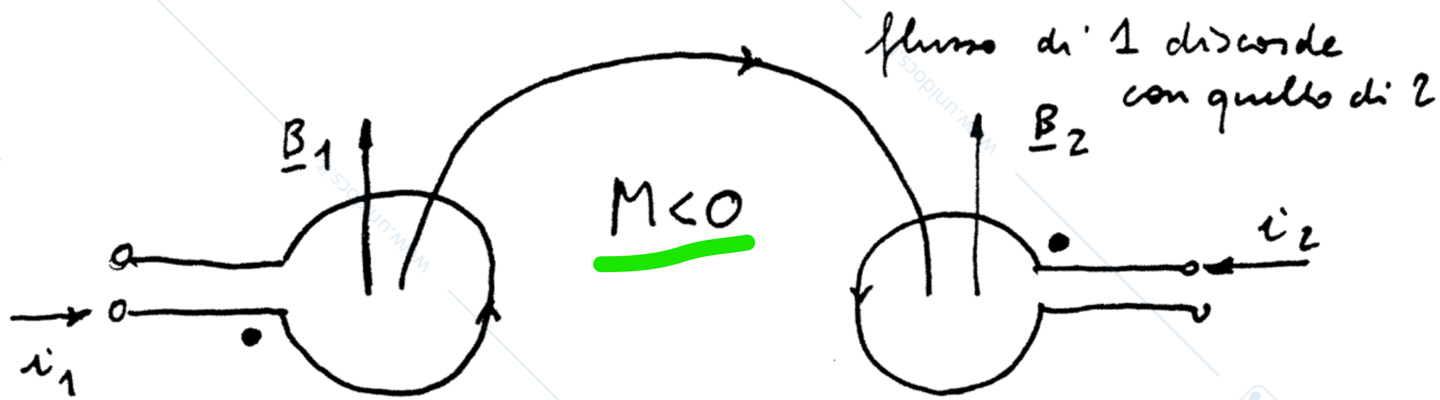
Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

La mutua induzione



Il flusso generato dalla spira 1 quando la spira 2 è disattivata è **concorde** con quello generato dalla spira 2 quando la spira 1 è disattivata.

La mutua induzione



Il flusso generato dalla spira 1 quando la spira 2 è disattivata è **discorde** con quello generato dalla spira 2 quando la spira 1 è disattivata.

Induttore a (2)N morsetti

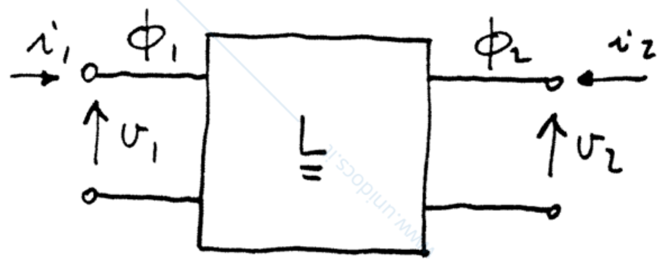
Un induttore a (2)N morsetti è un N-porte (la corrente entra ed esce da ciascuna porta) e ad ogni porta è associato un flusso.

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{i}$$

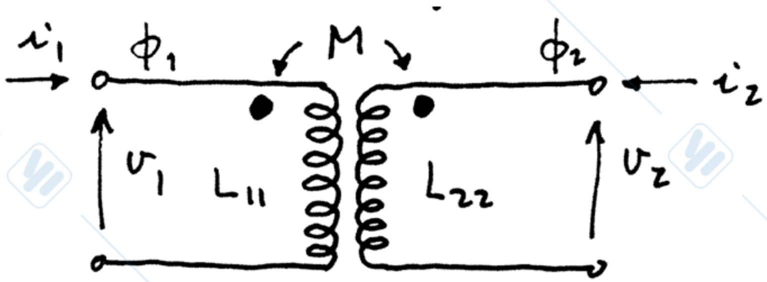
Vale tipicamente la reciprocità e $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$

*Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. **Giovanni Ghione** al Politecnico di Milano*

Induttore a 2 porte



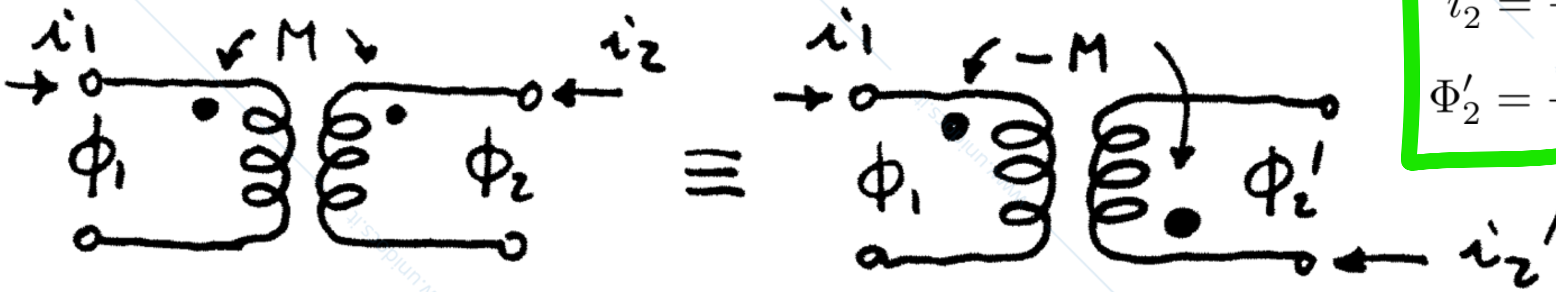
$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = M i_1 + L_{22} i_2 \end{cases}$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

Induttore a 2 porte



$$\boxed{\begin{aligned} i_2' &= -i_2 \\ \Phi_2' &= -\Phi_2 \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = M i_1 + L_{22} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 + M(-i_2') \\ \Phi_2 = M i_1 + L_{22}(-i_2') \end{cases}$$

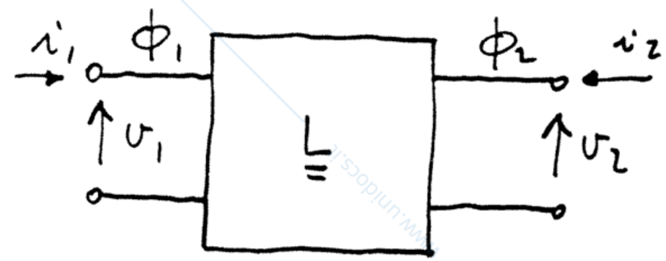
$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 - M i_2' \\ -\Phi_2 = -(M i_1 + L_{22}(-i_2')) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 - M i_2' \\ \Phi_2' = -M i_1 + L_{22} i_2' \end{cases}$$

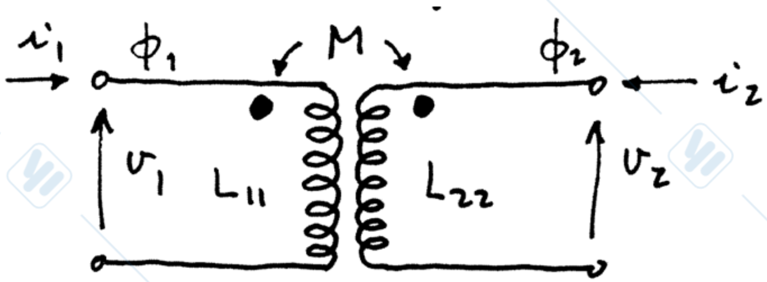
$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 + M' i_2' \\ \Phi_2' = M' i_1 + L_{22} i_2' \end{cases}$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

Induttore a 2 porte



$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{L}\frac{d}{dt}\boldsymbol{i}$$



$$\begin{cases} v_1 = L_{11}\dfrac{d}{dt}i_1 + M\dfrac{d}{dt}i_2 \\ v_2 = M\dfrac{d}{dt}i_1 + L_{22}\dfrac{d}{dt}i_2 \end{cases}$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del
prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

Induttore a 2 porte - Energia

$$v_1 i_i + v_2 i_2 = \left(L_{11}\tfrac{d}{dt}i_1 + M\tfrac{d}{dt}i_2\right)i_1 + \left(M\tfrac{d}{dt}i_1 + L_{22}\tfrac{d}{dt}i_2\right)i_2$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_{11}i_1^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_{22}i_2^2\right) + \frac{d}{dt}(Mi_1i_2)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + Mi_1i_2\right)$$

$$\frac{di_1}{dt}i_1$$

$$\frac{di_1^2}{dt} = \frac{di_1}{dt}i_1 + i_1\frac{di_1}{dt}$$

$$= 2\frac{di_1}{dt}i_1$$

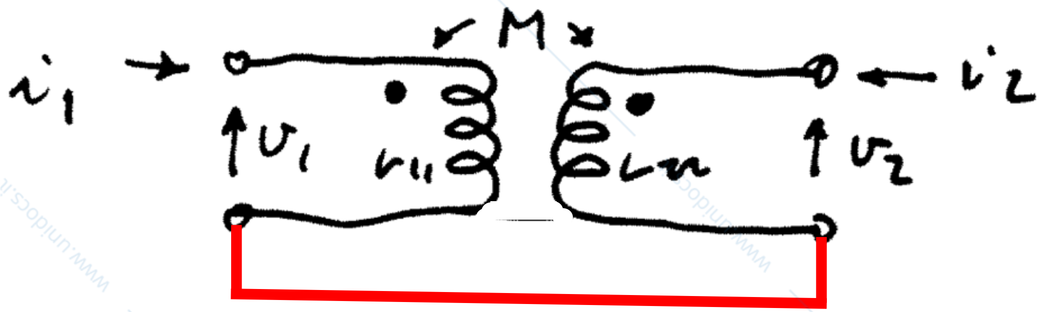
$$\frac{di_1}{dt}i_1 = \frac{di_1^2}{2dt}$$

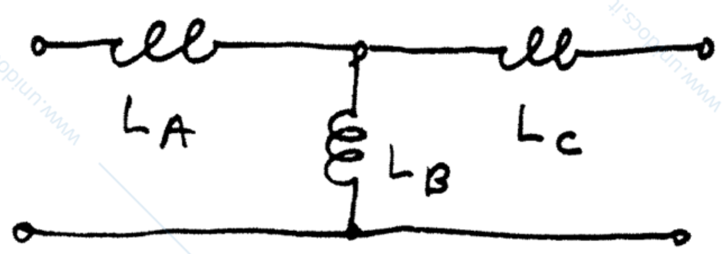
$$w_a = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + Mi_1i_2$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

Circuito equivalente a "T"

(valido per induttore a 2 porte connesso a tripolo)





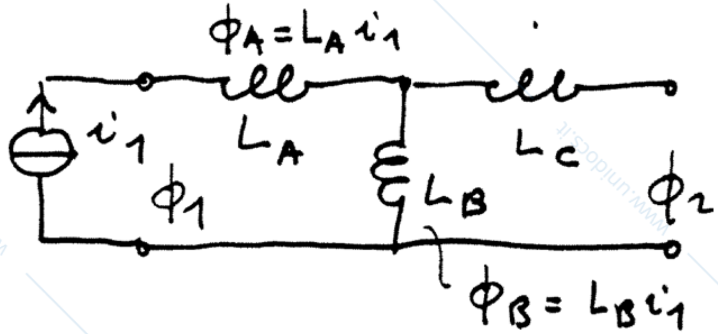
Osservazioni:

- Il circuito equivalente ha solo due variabili di stato (come il circuito di cui è il modello!) e introduce un "taglio-LA" (problemi numerici)
- Circuito a tripolo che per essere riportato in configurazione "2-porte" necessita di un trasferitore ideale di potenza con rapporto di trasformazione unitario connesso in cascata

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

Circuito equivalente a "T"

(valido per induttore a 2 porte connesso a tripolo)

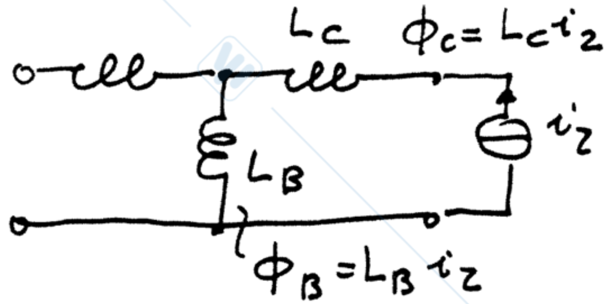


Prove semplici

$$v_1|_{i_2=0} = L_{11}\frac{d}{dt}i_1 = (L_A + L_B)\frac{d}{dt}i_1$$

$$v_2|_{i_2=0} = M\frac{d}{dt}i_1 = L_B\frac{d}{dt}i_1$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_A + L_B & L_B \\ L_B & L_C + L_B \end{bmatrix}$$

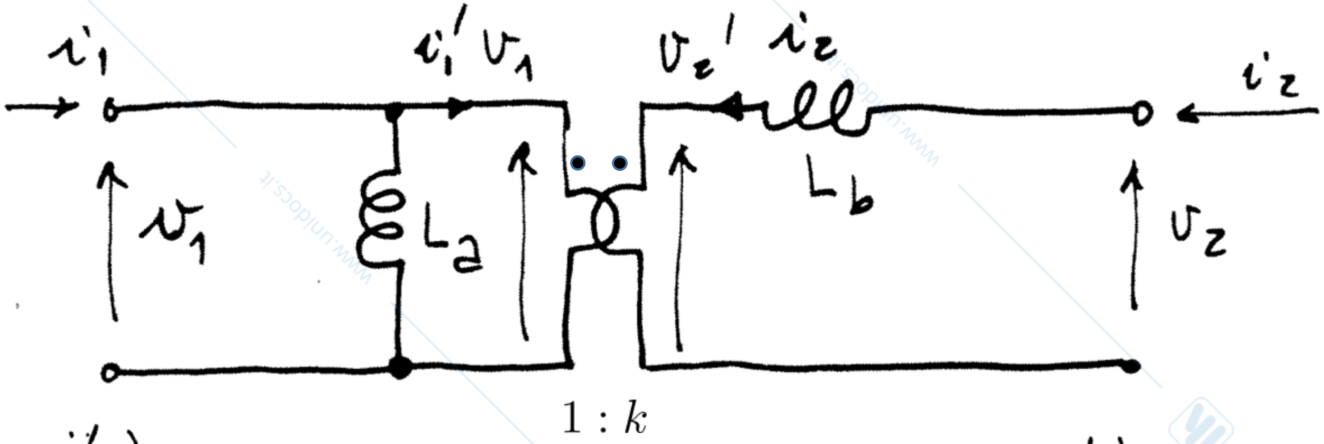


$$v_2|_{i_1=0} = L_{22}\frac{d}{dt}i_2 = (L_C + L_B)\frac{d}{dt}i_2$$

$$v_1|_{i_1=0} = M\frac{d}{dt}i_2 = L_B\frac{d}{dt}i_2$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

Circuito equivalente con trasferitore ideale di potenza



$$v_2' = k v_1$$

$$i_2 = -\frac{i_1'}{k}$$

$$v_1 = L_a \frac{d}{dt}(i_1 - i_1') =$$

$$= L_a \frac{di_1}{dt} - L_a(-k)\frac{di_2}{dt}$$

$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + kL_a \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = kv_1 + L_b \frac{di_2}{dt} =$$

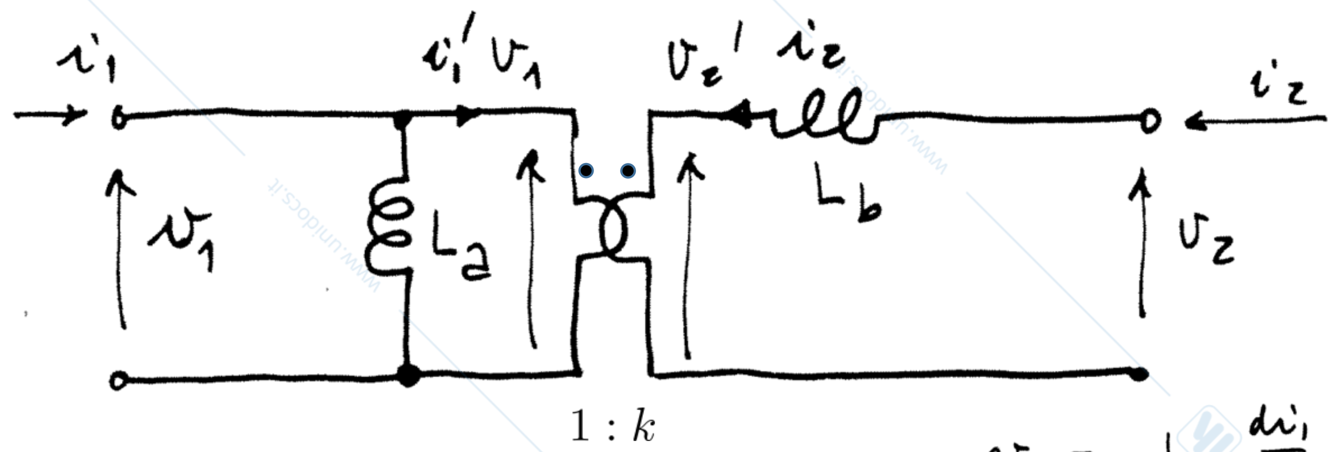
$$= kL_a \frac{di_1}{dt} + k^2 L_a \frac{di_2}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = kL_a \frac{di_1}{dt} + (k^2 L_a + L_b)\frac{di_2}{dt}$$

$$L_{11} = L_a \; ; \quad L_m = M = kL_a \; ; \quad L_{22} = L_b + L_a k^2$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

Circuito equivalente con trasferitore ideale di potenza



$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + kL_a \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = kL_a \frac{di_1}{dt} + (k^2 L_a + L_b) \frac{di_2}{dt}$$

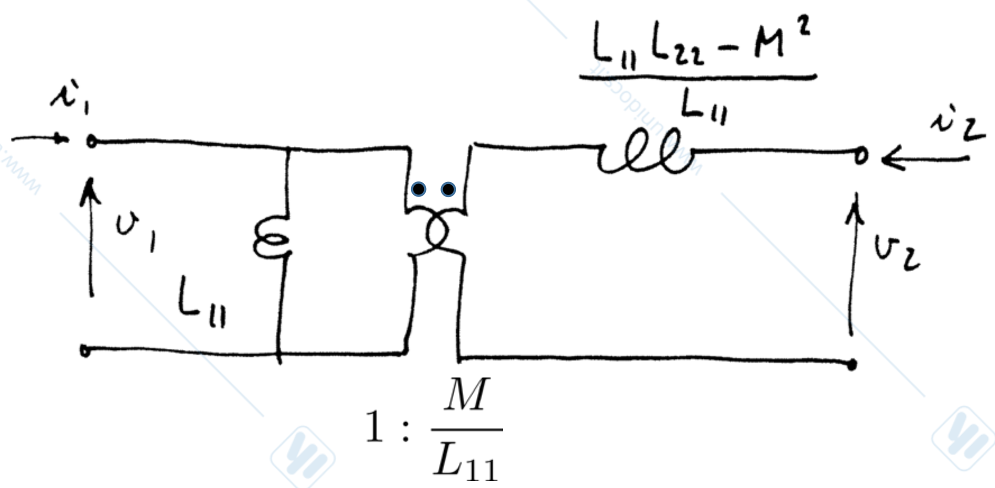
$L_{11} = L_a$; $L_m = M = kL_a$; $L_{22} = L_b + L_a k^2$

$\therefore$

$L_a = L_{11}$; $L_b = \dfrac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11}}$; $k = M / L_{11}$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

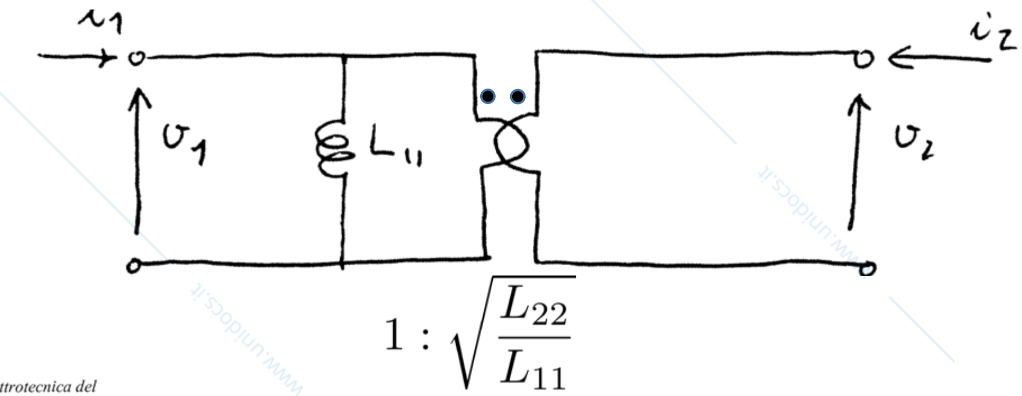
Circuito equivalente con trasferitore ideale di potenza



Accoppiamento perfetto o critico
(un solo elemento reattivo)

$$L_{11}L_{22} - M^2 = 0$$

$$M = \pm\sqrt{L_{11}L_{22}}$$



Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del prof. **Giovanni Ghione** al Politecnico di Milano