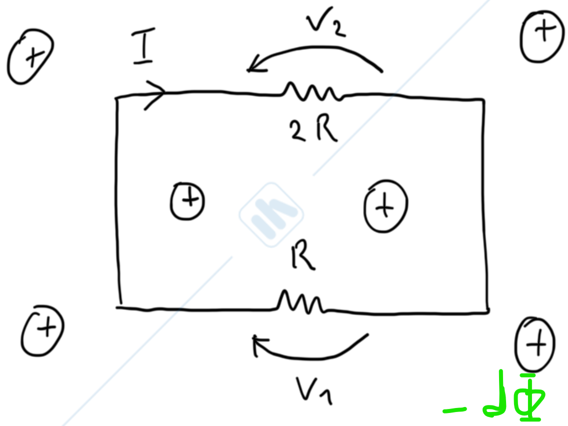


Area = $1\ m^2$

$\bar{B} = 0.1\,t \ \ Wb/m^2$

$R = 1\,\Omega$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \bar{E}\, d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}(t)}{\partial t}\, \hat{u}_n dS + \oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l}$$

1) DETERMINARE I

$$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \cdot \bar{u}_n\, dS - \oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l}$$

$\oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l} = 0$ perché la spira è ferma

→ la spira è orientata come la corrente

$$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = V_1 - V_2$$

$$V_1 - V_2 = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \cdot \bar{u}_n\, dS = \int_S \frac{\partial}{\partial t} 0.1\,t\, (-\hat{u}_z) \cdot (-\hat{u}_z)\, d$$

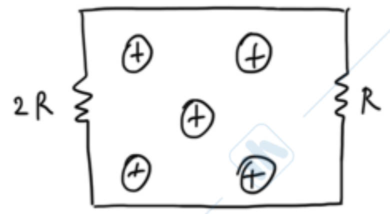
$$V_1 - V_2 = 0.1 \frac{Wb}{m^2 s} \cdot 1\ m^2 = 0.1 \frac{Wb}{s} = 0.1\ V$$

$$I = \frac{V_2 - V_1}{3R} = -\frac{0.1\ V}{3\,\Omega} = -\frac{1}{30}\ A$$

$$V_1 = -RI = \frac{1}{30}\ V$$

$$V_2 = 2RI = -\frac{1}{15}\ V$$

Poiché se la spira è in movimento ed è presente un campo $\bar B(t)$ e calcoliamo la circuitazione della forza di Lorentz lungo il percorso chiuso γ della spira $\oint_\gamma \bar F \cdot d\bar l = q\oint_\gamma (\bar v \times \bar B)\, d\bar l$ ⇒ significa che viene compiuto un lavoro sulle cariche della spira ⇒ se viene fatto lavoro significa che è stata generata una corrente elettrica ⇒ è presente una fem $\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint_\gamma (\bar v \times \bar B)\, d\bar l$



$A = 1\ m^2$

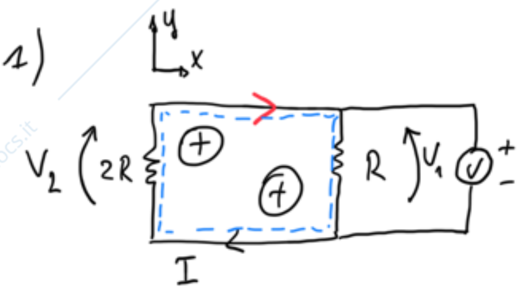
$\bar B = B_0\, t \quad Wb/m^2$

$B_0 = 0.1 \quad \frac{Wb}{s \cdot m^2}$

$R = 1\ \Omega$

la forza di Lorentz può generare una fem da movimento

1)



determinare la tensione misurata dal voltmetro

Come prima cosa, calcolo la corrente I nel circuito utilizzando la maglia azzurra.

ci dice che un campo magnetico vario nel tempo induce una fem $V = \oint_\gamma \bar E\, d\bar l$

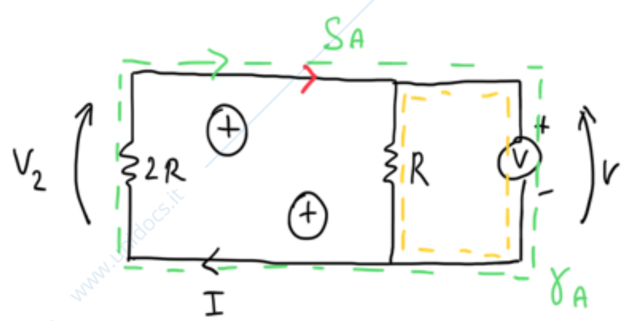
$$-\oint_\gamma \bar E \cdot d\bar l = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\bar B \cdot \bar n\, dS - \underbrace{\oint_\gamma (\bar v \times \bar B)\cdot d\bar l}_{=0}$$

$$-\oint_\gamma \bar E \cdot d\bar l = V_2 - V_1$$

$$V_2 - V_1 = \int_S \frac{\partial}{\partial t} B_0\, t\, (-\hat u_z)\cdot(-\hat u_z)\, dS$$

$$V_2 - V_1 = B_0 \cdot 1\, m^2 = 0.1\ V$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{3R} = -\frac{0.1}{3}\ A$$



Considero ora il percorso indicato in verde:

$$-\oint_{\gamma_A} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_{S_A} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}\cdot\bar{n}\, ds$$

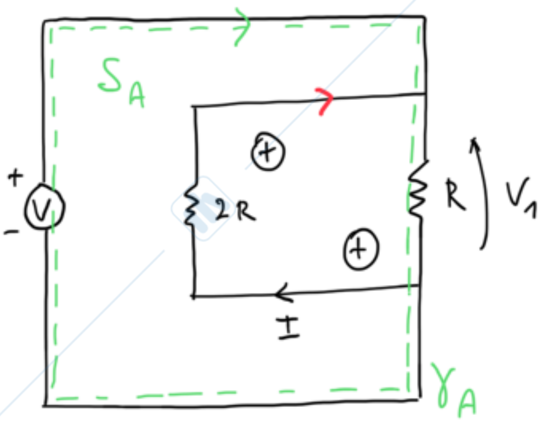
$$V_2 - V = \int_S \frac{\partial}{\partial t} B_0 t \,(-\hat{u}_z)\cdot(-\hat{u}_z)\, ds = B_0 = 0.1\,V$$

$$V = V_2 - 0.1 = -2RI - 0.1 = \frac{2}{3}\cdot 0.1 - 0.1$$

$$V = -\frac{1}{3}\, 0.1\ V$$

⇒ verificare che si ottenga lo stesso risultato considerando il percorso indicato in giallo.

b)



considero il percorso indicato in verde

$$-\oint_{\gamma_A} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_{S_A} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}\cdot\bar{n}\, ds$$

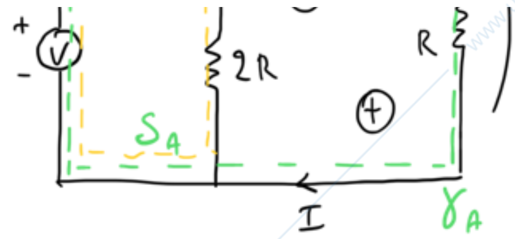
$$V - V_1 = \int_S \frac{\partial}{\partial t} B_0 t \,(-\hat{u}_z)\cdot(\hat{u}_z)\, ds = B_0 = 0.1\,V$$

$$V = V_1 + 0.1\,V = RI + 0.1\,V = -\frac{1}{3}\cdot 0.1\,V + 0.1\ V$$

$$V = \frac{2}{3}\, 0.1\ V$$

c)

considero il



V_1 percorso indicato in verde

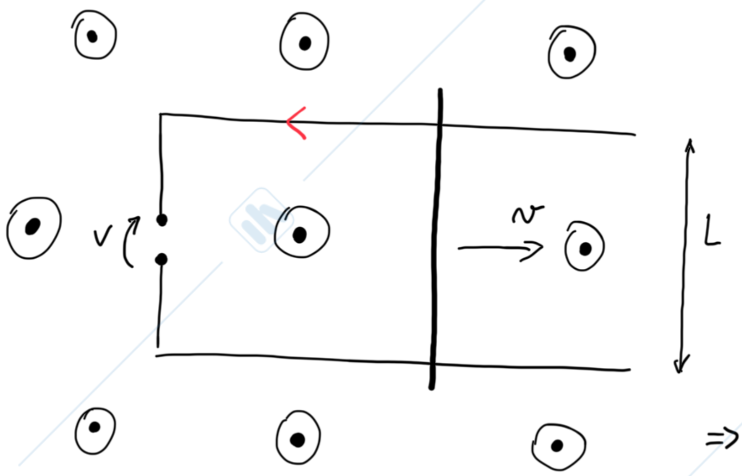
$$-\oint_{\gamma_A} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_{S_A} \frac{\partial}{\partial t}\bar{B}\cdot\bar{n}\,ds$$

$$V - V_1 = \int_S \frac{\partial}{\partial t} B_0 t\,(-\hat{u}_z)\cdot(-\hat{u}_z)\,ds = B_0 = 0.1\,V$$

$$V = V_1 + 0.1\,V = RI + 0.1\,V = -\frac{1}{3}0.1\,V + 0.1\,V$$

$$V = \frac{2}{3}\,0.1\,V$$

Verificare che si ottenga lo stesso risultato considerando il percorso indicato in giallo.



⇒ la spira è orientata come la freccia rossa

$$\Rightarrow -\oint \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -V$$

a) $\bar{B} = B_0 \hat{u}_z$

(★) $$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \cdot \bar{u}_n \, dS - \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \, d\bar{\ell}$$

$$\oint_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \cdot \bar{u}_n \, dS = 0$$ perché $\bar{B}$ è costante

$$V = \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \, d\bar{\ell} = -B_0 v L$$

→ $\bar{v} \times \bar{B}$ è rivolto verso il basso, ossia in direzione opposta al versore $d\bar{\ell}$. Di conseguenza si ha il segno −

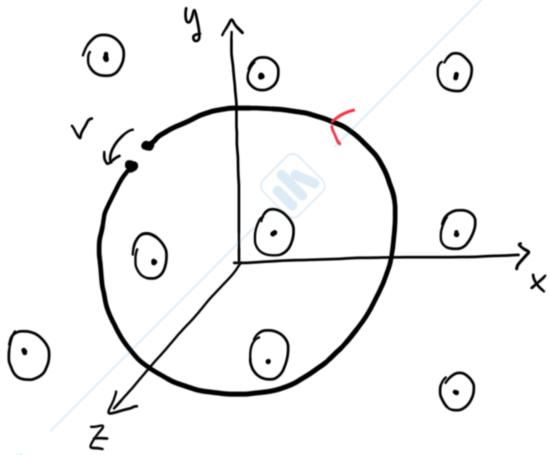
b) $\bar{B} = B_0 \cos \omega t$

usiamo sempre la terza eq.ne di Maxwell come indicata sopra (★)

$$-V = \int_S \frac{\partial}{\partial t} B_0 \cos \omega t \; \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z \, dS + B_0 v L \cos \omega t$$

$$V = B_0 \omega \sin \omega t \underbrace{\int_S dS}_{= L v t} - B_0 v L \cos \omega t$$

$$V = B_0 v L \,(\omega t \sin \omega t - \cos \omega t)$$



$\bar{B}(t) = B_0\, \hat{u}_z$

$B_0 = 0.01\ Wb/m^2$

1) il raggio della spira decresce con $v = 100\ m/s$
2) il raggio iniziale della spira vale $r = 10\ cm$

- Determinare V

la spira è percorsa secondo il verso indicato dalle freccie rosse.

$$\Rightarrow \quad -\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = V$$

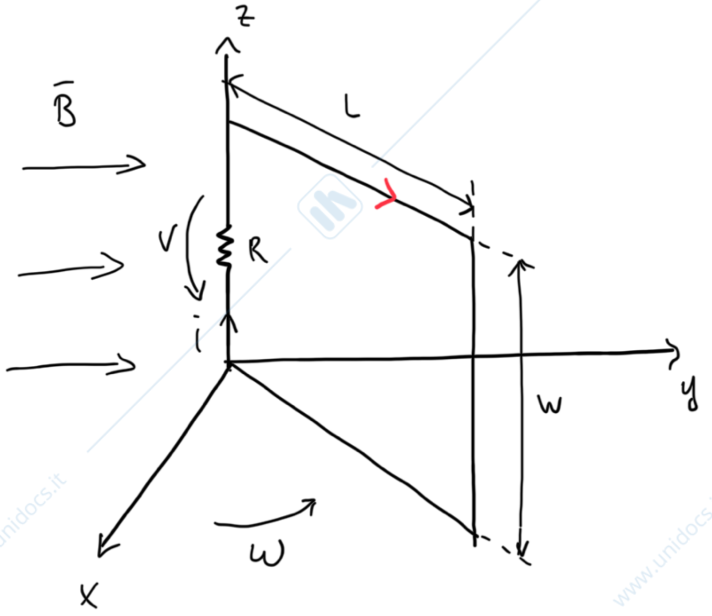
$$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \underbrace{\int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \cdot \bar{u}_n \, dS}_{=0} - \oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l}$$

perchè $\bar{B}$ è costante

$\bar{v} \times \bar{B}$ è orientato come $d\bar{l}$

$$V = -\oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l}$$

$$V = -v B_0\, 2\pi\, r(t) = -2\pi v B_0 (r_0 - vt)$$



$R = 0.02\ \Omega$

$\bar{B} = B_0 \hat{u}_y$

$B_0 = 0.01\ \frac{Wb}{m^2}$

$L = 1\ cm$

$w = 2\ cm$

$\omega = 2\ rad/s$

→ in $t = 0$ la spira giace nel piano x.

- Determinare la corrente i

→ La spira è percorsa secondo il verso indicato dalla freccia rossa.

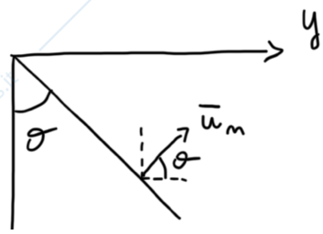
$$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -V$$

usiamo la seguente equazione:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \bar{u}_n \, dS$$

$$V = -\frac{d}{dt} B_0 \int_S \hat{u}_y \cdot \bar{u}_n \, dS$$

per calcolare $\hat{u}_y \cdot \bar{u}_n$, disegniamo il sistema visto dall'alto.



$$\theta = \omega t$$

$$\hat{u}_y \cdot \bar{u}_n = \cos\theta = \cos\omega t$$

$x \downarrow$

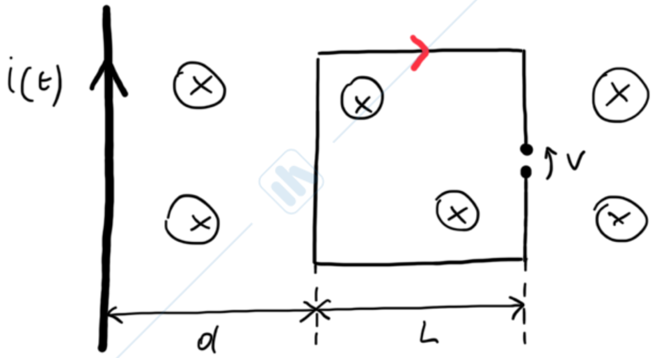
$$V = -B_0 \frac{d}{dt} \cos \omega t \int_S dS$$

$$V = \omega B_0 L W \sin \omega t$$

calcoliamo quindi $i = \dfrac{V}{R}$

$$i = \frac{\omega B_0 L W}{R} \sin \omega t$$

$$i = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-4} \sin 2t \quad A$$



$i(t) = A\cos(2\pi f t)$

$A = 0.5\ A$

$f = 5\ kHz$

$d = 5\ cm$

$L = 20\ cm$

- la spira e' percorsa secondo il verso indicato dalla freccia rossa.
- Determinare V.
- utilizzando la legge di Ampère - Laplace, possiamo scrivere il campo $\bar{B}$ in cui e' immersa la spira come

$$\bar{B}(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}(-\hat{u}_z)$$

, dove r e' la distanza dal conduttore in cui scorre la i(t).

$$-\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = -V$$

$$-\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(t)\cdot\bar{u}_n\, dS \underbrace{- \oint (\bar{v}\times\bar{B})\, d}_{=0}$$

$$-V = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\underbrace{(-\hat{u}_z)\cdot(-\hat{u}_z)}_{=1} dS$$

$$-V = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_S \frac{A}{r}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\cos(2\pi f t)}\, dS$$

$$= -2\pi f \sin(2\pi f t)$$

$$V = \mu_0 A f \sin(2\pi f t) \int_S \frac{dS}{r}$$

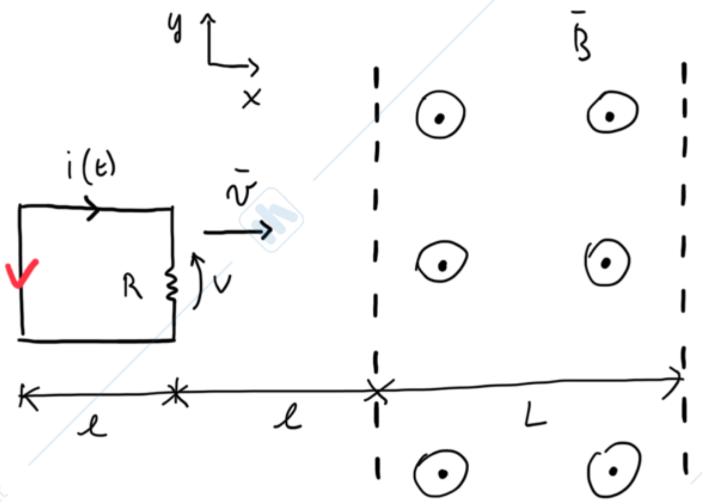
osserviamo che $S = Lr$ con $r \in [d, d+L]$,
quindi $dS = L\,dr$ e possiamo riscrivere
l'integrale di superficie come

$$\int_S \frac{dS}{r} = L \int_d^{d+L} \frac{dr}{r} = L \ln r \Big|_d^{d+L} = L \ln\left(\frac{d+}{d}\right.$$

quindi in definitiva abbiamo

$$V = \mu_0 A L f \ln \frac{d+L}{d} \sin(2\pi f t)$$

$$V = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{3} \ln 5 \sin(2\pi\, 5 \cdot 10^{3}\, t) \ V =$$
$$= 1.011 \sin(\pi\, 10^{4}\, t) \ mV$$



$l = 1\, m$

$R = 1\, \Omega$

$v = 1\, m/s$

$\bar{B} = B_0\, \hat{u}_z$

$B_0 = 2\, Wb/m^2$

- la spira è percorsa nel senso indicato dalla freccia rossa.
- Determinare $i(t)$ per $t \in [0, 6]\, s$
- $-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = V$
- $$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \underbrace{\int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \cdot \bar{u}_n\, dS}_{=0} - \oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l}$$

- per $t < 1\, s$ e $t \geq 5\, s$, la spira si trova al di fuori della regione in cui è presente il campo magnetico, e di conseguenza $-\oint E \cdot d\bar{l} = V = 0$. anche i è quindi nulla.

- per $2 \leq t < 4$, l'intera spira si trova all'interno della regione di spazio in cui è presente il campo magnetico.
$\Rightarrow$ la circuitazione è nulla.

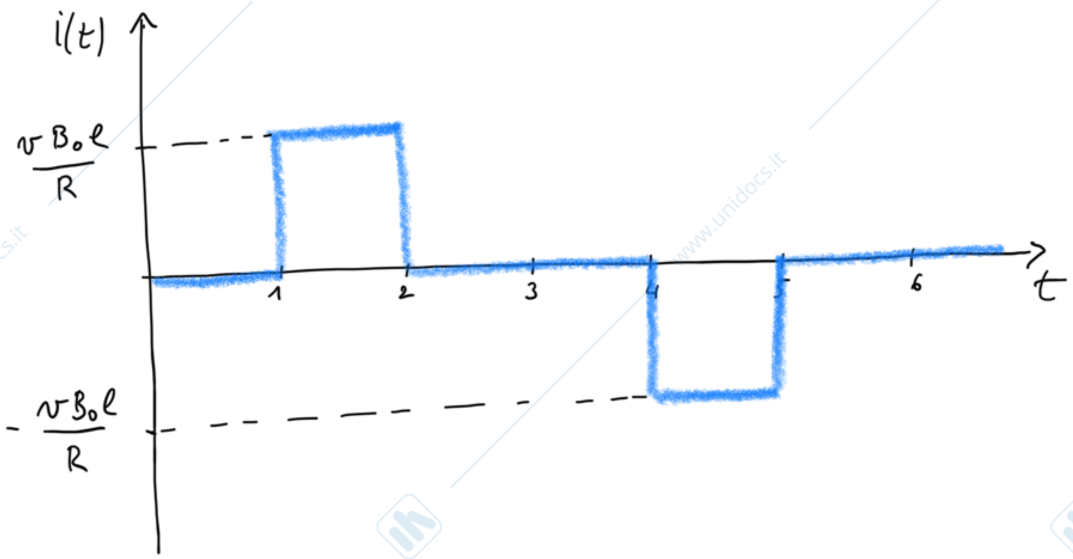
- per $1 \leq t < 2$, la spira sta entrando nella regione di spazio in cui è presente il campo magnetico.
(assumiamo che per $t = 1$ l'intero lato dx della spira sia all'interno della regione)

$$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = V = -\oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l}$$

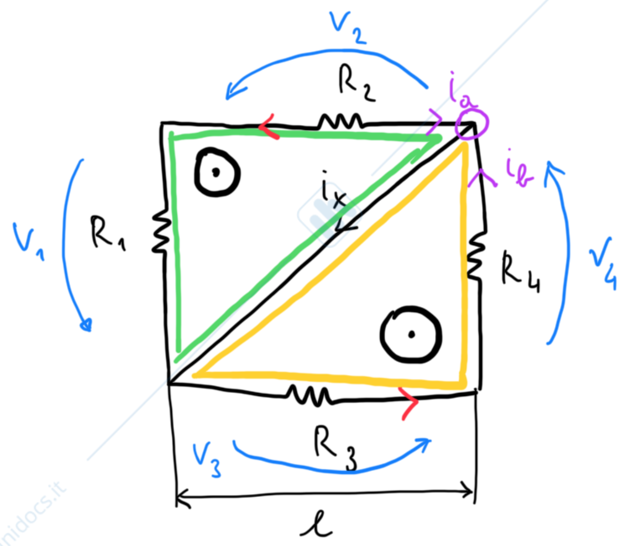
$$V = v B_0 l$$

- per $4 \leq t < 5$, la spira sta uscendo

$$V = -\oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l} = -v B_0 l$$



$$\frac{v B_0 l}{R} = \frac{1\ 2\ 1}{1}\ A = 2A$$



$l = 1\ m$

$R_1 = 3\ \Omega$

$R_2 = 2\ \Omega$

$R_3 = R_4 = 1\ \Omega$

$\bar{B}(t) = 0{,}002\, t^2\ \frac{Wb}{m^2}$

- la spira e' orientata secondo il verso delle freccie rosse.

1) considero la "maglia" VERDE

$$-\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \cdot \bar{u}_n\, dS - \underbrace{\oint (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l}}_{=0}$$

$$V_1 + V_2 = \int_S \frac{\partial}{\partial t} 0.002\, t^2\ \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z\, dS$$

$$V_1 + V_2 = 0.004\, t \cdot \frac{1}{2} = 0.002\, t \quad V$$

2) Considero la maglia GIALLA

$$V_3 + V_4 = 0{,}002\, t \quad V$$

3) Considero il nodo VIOLA

$$i_x = i_a + i_b = \frac{V_1 + V_2}{R_1 + R_2} - \frac{V_3 + V_4}{R_3 + R_4}$$

$$i_x = \frac{0.002\,t\,V}{5\,\Omega} - \frac{0.002\,t\,V}{2\,\Omega} = 0.002\,t\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) A$$

$$i_x = -\frac{3}{5}\,t \quad mA$$