082742 – Elettrotecnica (E-O)

Prof. F. Bizzarri

Esame, 19 Luglio 2013

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Firma** ______________________

AVVERTENZE

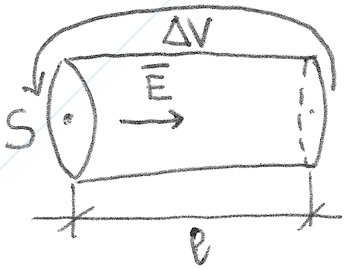
- La prova dura **3 ore**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a **16 punti** invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2.0 punti	E2a 6.0 punti	E2b 1.0 punti	E3a 9.0 punti	E3b 1.0 punti	E4 9.0 punti	Voto Finale
Voto							

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1a

Sia dato un cilindretto di materiale metallico conduttore di lunghezza *l* e di sezione *S*. Si assuma che il cilindretto abbia densità volumetrica di carica libera (elettroni) pari a ρ_V. Sia μ la mobilità degli elettroni. Si imponga tra le due estremità del cilindretto una differenza di potenziale costante ΔV. Derivare la legge di Ohm che lega ΔV alla corrente costante che si osserva nel cilindretto.



ΔQ: carica mobile nel cilindretto

$\Delta Q = \rho_V S l$ in Δt, con $v = \frac{l}{\Delta t}$

tutta la ΔQ fuoriesce da S

$v = \mu E$ velocità degli elettroni

E campo elettrico che deriva dall'aver imposto ΔV ai capi del cilindro

$E = \frac{\Delta V}{l}$

$$\Delta Q = \rho_V S l = \rho_V S \overbrace{v \Delta t}^{l} = \rho_V S \mu E \Delta t = \rho_V S \mu \frac{\Delta V}{l} \Delta t$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \Delta I = \underbrace{\rho_V \mu \frac{S}{l}}_{R^{-1}} \Delta V$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta I} = \underbrace{\frac{1}{\rho_V \mu} \frac{l}{S}}_{R}$$

E2a

Per il doppio bipolo in Figura 1 determinare la rappresentazione mediante la matrice [G].

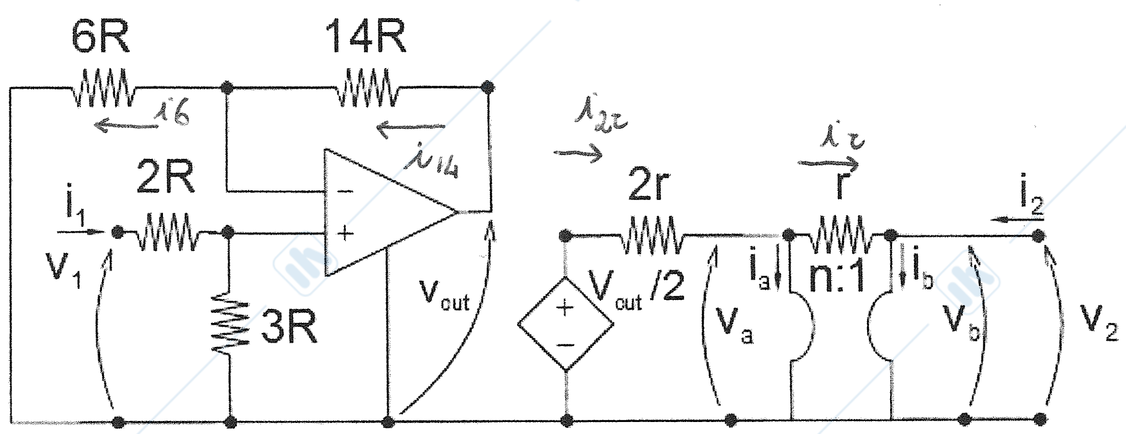


Figura 1

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$i_1 = \frac{V_1}{2R+3R} = \frac{V_1}{5R} \qquad G_{11} = 1/5R \quad e \quad G_{12} = \varnothing$$

$$i_{14} = i_6 \qquad i_6 = \frac{1}{6R} \cdot \frac{3R}{2R+3R} V_1 = \frac{1}{10R} V_1$$

$$V_{OUT} = V_{14} + V_6 = 14R\, i_{14} + 6R\, i_6 = 20R \cdot i_6 = 20R \cdot \frac{V_1}{10R} = V_1 \cdot 2$$

$$V_{OUT} = 2V_1$$

$$V_b = V_2 \qquad V_a = nV_b = nV_2$$

$$i_{2r} = \left(\frac{V_{OUT}}{2} - V_a\right) \cdot \frac{1}{2r} = \left(\frac{2V_1}{2} - nV_2\right)\frac{1}{2r} = \frac{V_1 - nV_2}{2r}$$

$$i_r = \frac{V_a - V_b}{r} = \frac{nV_b - V_b}{r} = \frac{(n-1)}{r} V_2$$

$$i_a = i_{2r} - i_r = \frac{V_1 - nV_2}{2r} - \frac{n-1}{r} V_2$$

$$i_2 = i_b \overset{-i_r}{=} -n i_a = -n\left[\frac{V_1 - nV_2}{2r} - \frac{n-1}{r}V_2\right] \cancel{} - \frac{n-1}{r}V_2 =$$

$- \frac{n-1}{r} V_2$

$$= \overbrace{-\frac{n}{2r}}^{G_{21}} V_1 + \Bigg(\underbrace{\frac{n^2}{2r} + \frac{n(n-1)}{r}}_{G_{22}} - \frac{n-1}{r}\Bigg) V_2 =$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5R} & \emptyset \\ -\frac{n}{2r} & \frac{n^2}{2r} + \frac{n(n-1)}{r} - \frac{n-1}{r} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5R} & \emptyset \\ -\frac{n}{2r} & \frac{3n^2 - 4n + 2}{2r} \end{bmatrix}$$

E2b

Determinare il valore di n>0 per il quale il doppio bipolo in Figura 1 non ammette la rappresentazione mediante la matrice [R].

se $\det[G] = \emptyset$ allora non esiste $[R]$:

$$\det[G] = \frac{1}{5R}\left(\frac{n^2}{2r} + \frac{(n-1)n}{r} + \frac{1-n}{r}\right) = \frac{1}{5R}\left(\frac{3n^2-4n+2}{2r}\right)$$

$3n^2 - 4n + 2 \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{R} \longrightarrow [R]$ è ammessa $\forall n > 0$

E3a

Per il circuito in Figura 2 che evolve a regime, sapendo che $e(t) = E\,sen(\omega t)$ e $a(t) = A\cos(2\omega t)$, determinare $i_e(t)$.

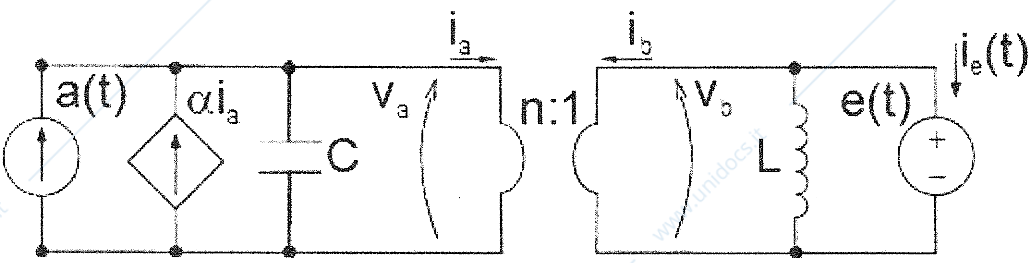
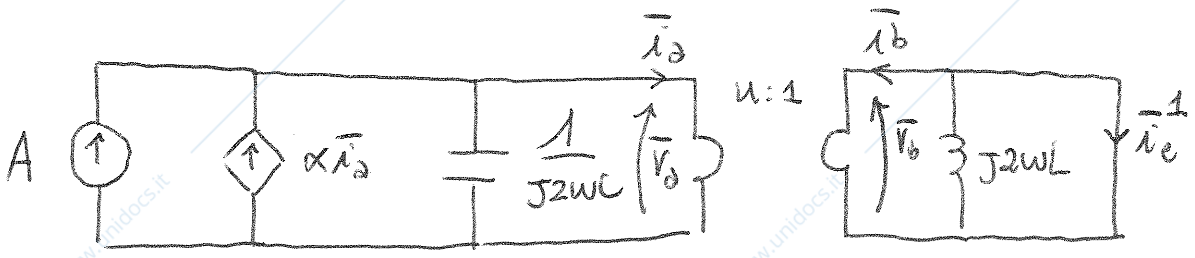


Figura 2

Caso 1:

$e(t) \equiv 0 \longrightarrow$ si lavora a pulsazione $2w$

$a(t) \xleftrightarrow[2w]{} A$



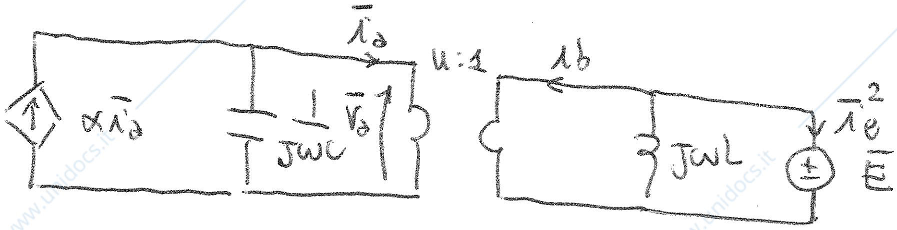
$\bar V_b = 0 \qquad \bar i_e^1 = -\bar i_b$

$-\bar i_b = -(-n\bar i_a) = n\bar i_a$

$\bar V_a = n\bar V_b = \emptyset \qquad \bar i_a = A + \alpha \bar i_a \qquad \bar i_a = \dfrac{A}{1-\alpha}$

$\bar i_e^1 = \dfrac{nA}{1-\alpha} \qquad i_e^1(t) = \dfrac{nA}{1-\alpha}\cos 2\omega t$

Caso 2 : $a(t) \equiv 0$ si lavora a pulsazione ω



$\bar E = -jE$

$\bar V_a = \dfrac{1}{j\omega C}(\alpha\bar i_a - \bar i_a) = \dfrac{\alpha-1}{j\omega C}\bar i_a \longrightarrow \bar i_a = \dfrac{j\omega C}{\alpha-1}\bar V_a$

$\bar V_b = \dfrac{\alpha-1}{jn\omega C}\bar V_a = \bar E \qquad \bar i_a = \dfrac{j\omega C n}{\alpha-1}\bar E$

$\bar i_b = -n\bar i_a = -\dfrac{j\omega C n^2}{\alpha-1}\bar E$

$\bar i_e^2 = -\bar i_b - \dfrac{\bar E}{j\omega L} = \dfrac{j\omega C n^2 \bar E}{\alpha-1} - \dfrac{\bar E}{j\omega L} = -jE\left(\dfrac{j\omega C n^2}{\alpha-1} - 1/j\omega L\right) =$

$= -jE\,\dfrac{j^2\omega C n^2 \omega L - (\alpha-1)}{j\omega L(\alpha-1)} = -jE\,\dfrac{-\omega^2 LCn^2 - (\alpha-1)}{j\omega L(\alpha-1)} =$

$= \dfrac{\omega^2 n^2 LC + (\alpha-1)}{\omega L(\alpha-1)}E$

$i_e^2(t) = E\,\dfrac{\omega^2 n^2 LC + (\alpha-1)}{\omega L(\alpha-1)}\cos\omega t$

$i_e(t) = i_e^1(t) + i_e^2(t)$

E3b

Per il circuito in Figura 2, ponendo A=0 e assumendo il funzionamento in regime sinusoidale, determinare la potenza complessa erogata dal generatore di corrente pilotato in corrente.

$$\bar{P}_{ec} = \frac{1}{2} \bar{V}_2 (\alpha \bar{I}_2)^* = \frac{1}{2} (n\bar{E}) \left(\alpha \frac{j\omega C}{\alpha - 1} n\bar{E}\right)^* =$$

$$= -\frac{1}{2} n^2 E^2 j \alpha\omega C = -\frac{1}{2} E^2 j \frac{n^2 \alpha\omega C}{\alpha - 1}$$

E4

Il circuito in Figura 3, per t=0⁻ evolve in regime stazionario. Sapendo che

- $r - R < 0$ $\quad r < R \quad$ $0 < r < R$
- **a(t) = 0 per t<0 ed a(t) = A per t>0,**
- **e(t) = E per t<0 ed e(t) = 0 per t>0,**

determinare la corrente $i_R(0^-)$ e $i_R(t)$ per $t \in (0, +\infty)$.

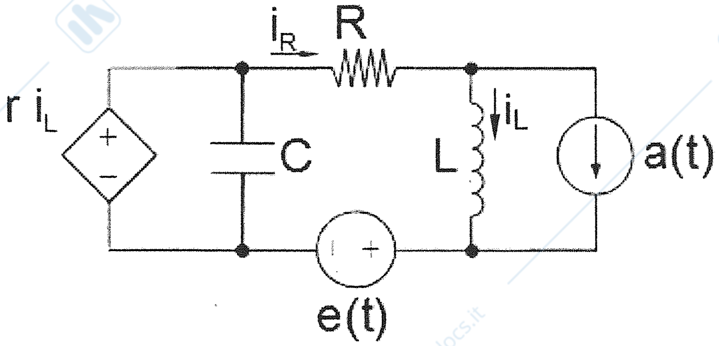
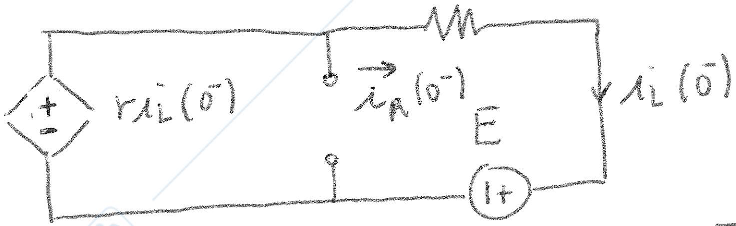


Figura 3

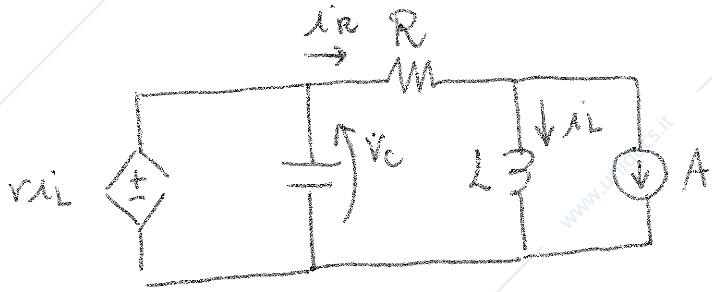
in $t = 0^-$

$i_R(0^-) = i_L(0^-)$



$r i_L(0^-) - R i_L(0^-) - E = 0 \qquad i_L(0^-) = i_R(0^-) = \dfrac{E}{r-R}$

per $t > 0$



$V_C = r i_L$ c'è una combinazione lineare tra variabili di stato.

una sola variabile di stato $\rightarrow$ una $\lambda = -\infty$ e l'altra finita

$i_R = \left(r i_L - L\dfrac{di_L}{dt}\right)\dfrac{1}{R} \qquad i_R = i_L + A$

$\left(r i_L - L\dfrac{di_L}{dt}\right)\dfrac{1}{R} = i_L + A \qquad L\dfrac{di_L}{dt} = (r-R)i_L - AR$

$\dfrac{d}{dt} i_L = \dfrac{r-R}{L} i_L - \dfrac{AR}{L} \qquad \lambda = \dfrac{r-R}{L} < 0$ (circuito stabile)

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{\tau - R}{L} i_L(t) - \frac{AR}{L}$$

$$i_L(t) = K e^{\lambda t} + H$$

$$\frac{d}{dt} H = \frac{\tau - R}{L} \cdot H - \frac{AR}{L} \longrightarrow H = \frac{AR}{\tau - R}$$

$$i_L(0^-) = \frac{E}{\tau - R}$$

$$\frac{E}{\tau - R} = K e^{\lambda \emptyset} + \frac{AR}{\tau - R} \longrightarrow K = \frac{E - AR}{\tau - R}$$

$$i_L(t) = \frac{E - AR}{\tau - R} e^{\frac{\tau - R}{L} t} + \frac{AR}{\tau - R}$$

$$i_R(t) = \frac{E - AR}{\tau - R} e^{\frac{\tau - R}{L} t} + \frac{AR}{\tau - R} + A =$$

$$= \frac{E - AR}{\tau - R} e^{\frac{\tau - R}{L} t} + \frac{\tau A}{\tau - R}$$