

Elettrotecnica

edoardo.tona

Agosto 2016

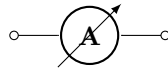
Indice

1	Corrente elettrica e amperometro ideale	3
2	Tensione elettrica e voltmetro ideale	3
3	Bipoli, N-poli, M-bipoli, porta elettrica	3
4	Potenza elettrica scambiata ad una porta, wattmetro	4
5	Bipoli ideali di ordine zero (adinamici)	4
6	Bipoli R, GIT, GIC	4
7	Serie di bipoli	5
8	Parallelo di bipoli	5
9	Teoria dei grafi: elementi topologici delle reti di bipoli	6
10	Leggi di Kirchoff	6
11	Teorema di Tellegen e Teorema di Sostituzione	6
12	Teoremi di non amplificazione: enunciato e dimostrazione della non amplificazione delle tensioni	7
13	Resistenza equivalente ad una porta	7
14	Partitore di tensione e di corrente	7
15	Bipoli affini: generatore affine di tensione e di corrente	8
16	Teorema dell'adattamento del carico	8
17	Analisi delle reti normali in regime stazionario: il problema generale	8
18	Metodi di eliminazione delle tensioni e delle correnti	9
19	Metodo delle correnti di anello	9
20	Metodo dei potenziali ai nodi	9
21	Teorema di sovrapposizione degli effetti	10
22	Teorema di reciprocità	10
23	Teorema di Thevenin	11
24	Teorema di Norton	11
25	Doppi bipoli ideali inerti di ordine zero: reciprocità, simmetria, passività	11
26	Proprietà e sintesi a T di un doppio bipolo resistivo	12
27	Trasformatore ideale	13
28	Generatori pilotati in tensione e in corrente: equazioni caratteristiche	13
29	Funzione integrale di corrente	14
30	Funzione integrale di tensione	14
31	Bipolo condensatore: proprietà generali	14
32	Bipolo induttore: proprietà generali	15
33	Proprietà delle grandezze sinusoidali	15
34	Rappresentazione fasoriale delle funzioni sinusoidali	16
35	Rappresentazione del diagramma dei fasori	16
36	Potenza istantanea in regime sinusoidale	17
37	Potenza attiva, reattiva e apparente e complessa	17
38	Comportamento di un resistore ideale in regime sinusoidale	18
39	Comportamento di un condensatore ideale in regime sinusoidale	18
40	Comportamento di un induttore ideale in regime sinusoidale	18

41	Impedenza	18
42	Ammettenza	19
43	Sintesi serie di impedenze	19
44	Sintesi parallelo di ammettenze	19
45	Risonanza elettrica serie	19
46	Risonanza elettrica parallelo	20
47	Adattamento di carico in regime sinusoidale	21
48	Doppio bipolo induttivo e suo comportamento in regime sinusoidale	21
49	Terne di tensioni: definizioni fondamentali	21
50	Connessioni di generatori e carichi	22
51	Potenza nei sistemi trifase	23
52	Misure di potenza nei sistemi trifase: inserzione Aron	23
53	Rifasamento in regime trifase	24
54	Sistemi di equazioni differenziali (reti in regime variabile)	24
55	Impostazione generale dell'analisi di reti in regime variabile	24
56	Integrale particolare	25
57	Integrale dell'omogenea associata	25
58	Determinazione dell'uscita e calcolo delle costanti	25
59	Rete RC con generatore stazionario	25
60	Rete RC con generatore sinusoidale	26
61	Rete RL e GL con generatore stazionario	26
62	Rete RL con generatore sinusoidale	27
63	Rete LC con generatore stazionario	27
64	Rete RLC serie con generatore stazionario: caso sovracritico (sovrasmorzato)	27
65	Rete RLC serie con generatore stazionario: caso critico	28
66	Rete RLC serie con generatore stazionario: caso sottocritico (sottosmorzato)	28
67	Rete GLC parallelo con generatore stazionario: evoluzione libera	29

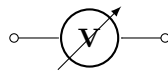
1 Corrente elettrica e amperometro ideale

La corrente elettrica è la grandezza che descrive il moto delle cariche elettriche. Si definisce $i(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_s(t)}{\Delta t}$ dove $q_s(t)$ è la quantità di carica elettrica che nel tempo Δt fluisce attraverso una superficie orientata S . Si può anche definire come $i(t) = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$ dove \vec{J} è il vettore densità di corrente e \vec{n} il vettore normale alla superficie orientata S . L'unità di misura del SI è l'Ampere [A]. Il tubo di flusso è una regione dello spazio dove il moto delle cariche è canalizzato, circondando il conduttore con del materiale isolante. La corrente è valutata sulle superfici che tagliano il tubo. La corrente si dice solenoidale se è uguale in tutte le sezioni del conduttore (corrente che esce = corrente che entra). Questo si verifica in ambito stazionario o quasi-stazionario. L'amperometro ideale è uno strumento che inserito in un circuito non modifica le condizioni pre-esistenti (quindi ha tensione nulla ai suoi capi) e indica istante per istante l'intensità della corrente.



2 Tensione elettrica e voltmetro ideale

La tensione elettrica è la grandezza che descrive la presenza di forze di natura elettromagnetica che agiscono sulle cariche elettriche. Si definisce la tensione dal punto iniziale a quello finale come $v(t) := \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{L}(t)}{\Delta q}$ dove $\mathcal{L}(t)$ è il lavoro che le forze agenti in ogni punto della linea l (che congiunge il punto finale a quello iniziale) sono in grado di compiere. Si può definire anche come $v(t) = \int_l \vec{E} \cdot \vec{t} dl$ dove \vec{E} è il campo elettrico lungo il percorso l . Se non ho fenomeni di induzione allora la tensione non dipende dal percorso. L'unità di misura del SI è il Volt [V] = $\frac{J}{C}$. Nel caso in cui la tensione non dipenda dal percorso allora può essere espressa come differenza di potenziale. In questi casi si dice che la tensione è conservativa. Lo strumento per la misura della tensione è il voltmetro. I suoi morsetti vanno collegati ai punti in cui si vuole misurare la tensione e la sua presenza non modifica le condizioni del circuito.



3 Bipoli, N-poli, M-bipoli, porta elettrica

Se le correnti di un componente fisico sono solenoidali (cioè la somma di tutte le correnti ai morsetti è nulla) e le tensioni fra due morsetti sono conservative (cioè sono differenze di potenziale e la somma $v_{12}(t) + v_{23}(t) + \dots + v_{n1}(t) = 0$) allora il componente elettrico è caratterizzato solo dai valori di corrente e tensione ai morsetti e può essere schematizzato senza tenere conto di forma e dimensioni. Si dice quindi N-polo con n il numero dei morsetti (bipolo se $n = 2$).

Tensioni conservative Al di fuori della superficie che racchiude l'N-polo la variazione del campo di induzione magnetica deve essere nulla o trascurabile.

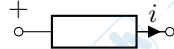
Correnti solenoidali Al di fuori della superficie deve essere nullo il campo della corrente di spostamento.

Si dice porta elettrica di un N-polo una coppia di morsetti con correnti uguali, uno con riferimento entrante e l'altro uscente. La porta è caratterizzata da questo valore di corrente e dalla tensione fra i due morsetti. Si dice M-bipolo un N-polo con $m = n/2$ porte. Un N-polo generico posso considerarlo come (N-1)-bipolo considerando lo stesso verso per $n - 1$ poli e l'opposto per l'ennesimo che sarà quello comune.

4 Potenza elettrica scambiata ad una porta, wattmetro

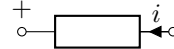
Si definisce potenza elettrica scambiata ad una porta la grandezza $p(t) := v(t) \cdot i(t)$ e si misura in Watt [W]. Per dire se la potenza è generata o assorbita bisogna adottare una convenzione.

Convenzione degli utilizzatori



Con $p(t) > 0$ la potenza è assorbita.

Convenzione dei generatori



Con $p(t) > 0$ la potenza è generata.

La potenza totale di un M-bipolo è la somma delle potenze di tutte le m porte, utilizzando sempre la stessa convenzione. L'integrale della potenza rispetto al tempo si dice lavoro elettrico. Gli M-bipoli che possono erogare lavoro convertendolo da altre forme di energetiche si dicono attivi, altrimenti passivi. La potenza scambiata ad una porta si può misurare con il wattmetro che ha 2 morsetti per misurare la corrente e altri 2 per misurare la tensione. Quello ideale non modifica le condizioni pre-esistenti.

5 Bipoli ideali di ordine zero (adinamici)

I bipoli che hanno relazioni tra corrente e tensione indipendenti dalla dinamica temporale si dicono "di ordine zero" oppure "adinamici". Il luogo dei punti di lavoro si dice caratteristica esterna ed è rappresentabile in un grafico $v - i$. Le intersezioni con gli assi si dicono tensione a vuoto e corrente di cortocircuito. I bipoli adinamici possono avere diverse proprietà:

Inerte La tensione è nulla se e solo se la corrente è nulla (intersezione con gli assi solo sull'origine);

Bilaterale La caratteristica esterna è simmetrica rispetto all'origine, posso scambiare le connessioni dei morsetti;

Controllato in corrente/tensione Ogni valore di corrente/tensione identifica un solo valore di tensione/corrente;

Controllato sia in corrente che in tensione C'è una relazione biunivoca fra v e i ;

Comandato/Pilotato Può cambiare caratteristica al variare di una grandezza di controllo;

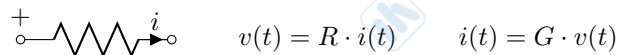
Tempo variante/invariante Varia nel tempo oppure no;

Attivo/Passivo Può erogare potenza oppure no.

Alcuni bipoli adinamici che abbiamo visto: resistore, cortocircuito, circuito aperto, interruttore, GIT, GIC, diodo ideale.

6 Bipoli R, GIT, GIC

Resistore

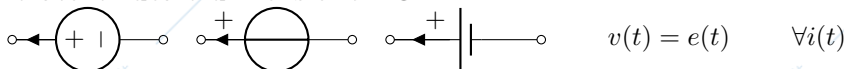


$$v(t) = R \cdot i(t) \quad i(t) = G \cdot v(t)$$

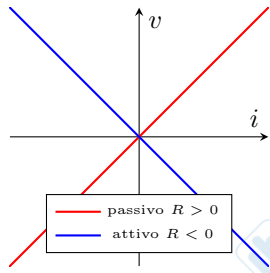
Dove R è la resistenza [Ω] e G la conduttanza [S], legate dalla relazione $R = 1/G$.

Il resistore è controllato sia in corrente che in tensione, è inerte e bilaterale. Solitamente si usa la convenzione degli utilizzatori.

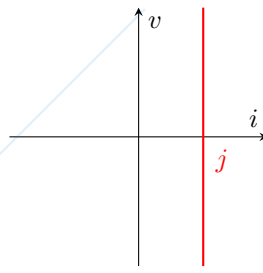
Generatore Ideale di Tensione - GIT



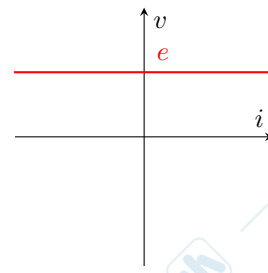
$$v(t) = e(t) \quad \forall i(t)$$



Caratteristica resistore



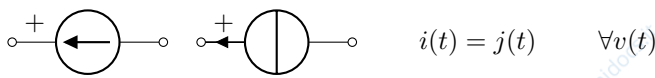
Caratteristica GIT



Caratteristica GIC

Il GIT non è bilaterale, non è inerte. È controllato in corrente, può essere variabile o costante nel tempo. Solitamente si usa la convenzione dei generatori.

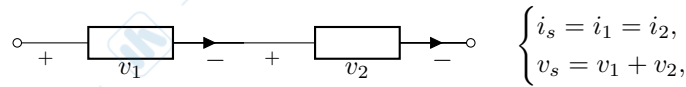
Generatore Ideale di Corrente - GIC



Il GIC non è bilaterale, non è inerte. È controllato in tensione, può essere variabile o costante nel tempo. Solitamente si usa la convenzione dei generatori.

7 Serie di bipoli

Supponiamo di avere sempre la stessa convenzione (dei generatori o degli utilizzatori). Il bipolo equivalente alla serie ha caratteristica:

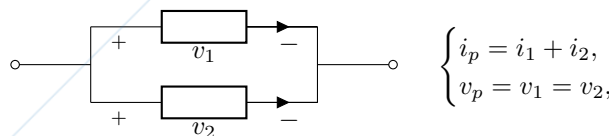


Non tutte le coppie di bipoli possono essere messe in serie, ad esempio non si possono mettere in serie due GIC oppure un GIC (con $i \neq 0$) e un aperto.

- Serie di due resistori $i_s = i_1 = i_2$
 $v_s = v_1 + v_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 = (R_1 + R_2) i_s$
- Serie resistore + GIT $i_s = i_R$
 $v_s = E + R i_R$
- Serie resistore + GIC $i_s = J$
 $\forall v_s = v_J + R J$
- Serie GIT + GIC $i_s = J$
 $\forall v_s = v_J + E$

8 Parallelo di bipoli

Supponiamo di avere sempre la medesima convenzione. Il bipolo equivalente al parallelo ha caratteristica:



Non tutte le coppie di bipoli possono essere messe in parallelo, ad esempio non si possono mettere in parallelo due GIT oppure un GIT e un cortocircuito.

$$\text{Parallelo di due resistori} \quad i_p = i_1 + i_2 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_p = \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right) v_p$$

$$v_p = v_1 = v_2$$

9 Teoria dei grafi: elementi topologici delle reti di bipoli

Ho un grafo con n nodi e l lati. Il grafo può essere ridotto (massimo 3 lati per ogni nodo), orientato, connesso (è un unico blocco), completo (ho il numero massimo di lati $l_{max} = \frac{n(n-1)}{2}$), piano (senza intersezioni).

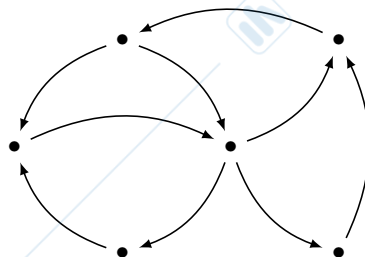
Una **maglia** è un sottografo connesso, dove in ogni nodo incidono solo 2 lati. È individuata da una linea chiusa che tocca tutti i nodi e percorre i lati al massimo una volta.

Un **anello** è una maglia che chiude un'area senza altri lati. Il numero di anelli è $a = l - n + 1$ (se il grafico è piano, altrimenti ce n'è uno in più).

Un **insieme di taglio** è un insieme di lati del grafo. Se li rimuovo tutti il grafo diventa non connesso; se li rimuovo tutti tranne uno il grafo rimane connesso. Quelli sul nodo si dicono insiemi di taglio fondamentali.

Un **albero** è un percorso aperto che congiunge tutti i nodi del grafo. I rami sono $r = n - 1$.

Un **coalbero** è un insieme di lati complementare a un albero. I lati si chiamano corde e sono $c = l - r = l - n + 1$.



10 Leggi di Kirchoff

Legge di Kirchoff delle Correnti (LKC). In ogni rete di N -poli, in qualsiasi istante è uguale a zero la somma algebrica delle correnti dei lati che compongono un insieme di taglio. La somma delle correnti dei lati che sia appoggiano su un nodo è zero. Questa legge deriva dal fatto che le correnti sono sinusoidali e che non può variare la quantità di carica contenuta in una superficie chiusa.

Legge di Kirchoff delle Tensioni (LKT). In ogni rete di N -poli, in qualsiasi istante è uguale a zero la somma algebrica delle tensioni dei lati appartenenti a una maglia. Per effettuare la somma algebrica devo definire un verso di percorrenza della maglia. La LKT equivale all'ipotesi che le tensioni degli N -poli siano conservative.

Un sistema di maglie indipendenti è tale per cui le equazioni della LKT risultino indipendenti. Il numero di maglie indipendenti è uguale al numero di corde di un coalbero $m = c = l - r = l - n + 1$ cioè è uguale al numero di anelli a .

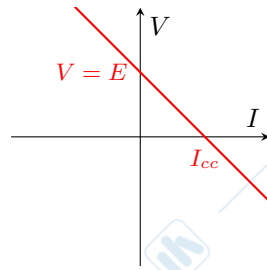
Un sistema di insiemi di taglio indipendenti è tale per cui le equazioni della LKC risultino indipendenti. Il numero è uguale al numero di rami di un albero $t = r = n - 1$.

Con Kirchoff ottengo $n - 1$ equazioni indipendenti alle correnti e m equazioni indipendenti alle tensioni. In totale avrò $n - 1 + m = l$ equazioni che si dicono topologiche, in $2l$ incognite.

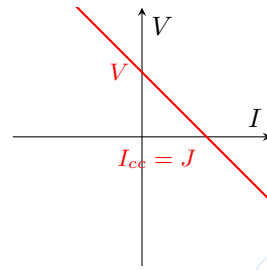
11 Teorema di Tellegen e Teorema di Sostituzione

Teorema di Tellegen. Sia $\{v_h\}$ con $h = 1, 2, \dots, l$ un insieme di valori istantanei di tensioni dei lati, compatibili con la LKT e sia $\{i_h\}$ con $h = 1, 2, \dots, l$ un insieme di valori istantanei di corrente dei lati, compatibili con la LKC. Allora $\sum_{h=1}^l v_h i_h = 0$

Dimostrazione. Consideriamo il lato a_h appoggiato ai nodi N_r e N_s . Allora $v_h i_h = v_{rs} i_{rs}$ inoltre v_{rs} è differenza di potenziale quindi $v_h i_h = (u_r - u_s) i_{rs}$. Facciamo la somma:



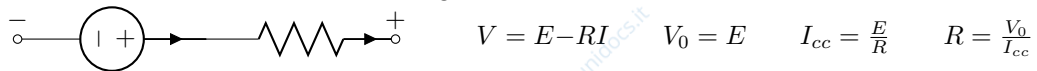
Caratteristica GAT



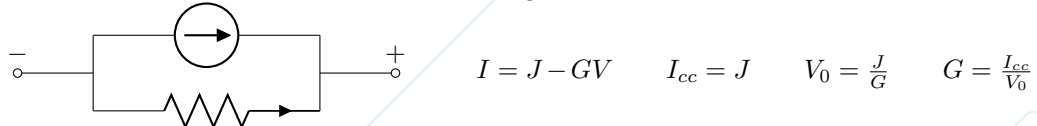
Caratteristica GAC

15 Bipoli affini: generatore affine di tensione e di corrente

Generatore Affine di Tensione - GAT: Consiste in un GIT in serie a un resistore ideale. Non è bilaterale. Viene convenzionato da generatore.



Generatore Affine di Corrente - GAC: Consiste in un GIC in parallelo a un resistore ideale. Non è bilaterale. Viene convenzionato da generatore.



I due generatori affini sono equivalenti (e possono essere trasformati l'uno nell'altro) se e solo se $R \neq 0$ e $G \neq 0$. Il parallelo e la serie è simile a quella dei resistori. I GAT/GAC possono essere considerati generatori reali se ci si tiene distanti dalla $V = 0$ e dalla I_{cc} infatti in prossimità di questi punti i generatori reali degenerano.

16 Teorema dell'adattamento del carico

Teorema dell'adattamento del carico (massimo trasferimento di potenza). *Un generatore affine di tensione eroga la massima potenza quando alimenta un carico con resistenza equivalente a quella interna. Con $R_u = R_i$ ho $P_{max} = \frac{E^2}{4R_i}$.*

Dimostrazione.

$$I = \frac{E}{R_u + R_i} \quad P = R_u I^2 = \frac{R_u E^2}{(R_u + R_i)^2}$$

Il massimo lo trovo studiando la derivata:
$$\frac{dP_u}{dR_u} = \frac{R_i - R_u}{(R_i + R_u)^3} E^2$$

Ho un massimo quando $R_i = R_u$

□

17 Analisi delle reti normali in regime stazionario: il problema generale

In una rete con l bipoli e n nodi ho $2l$ incognite che posso risolvere con $2l$ equazioni: l equazioni topologiche (dalla LKT e LKC) e l equazioni tipologiche (dalle caratteristiche dei bipoli). Escludendo di avere strutture singolari la soluzione esiste ed è unica, tuttavia con un l elevato è computazionalmente complessa, soprattutto da fare a mano.

Si procede quindi a rielaborare le equazioni per ottenere sistemi di equazioni separabili in maniera da risolvere sistemi ridotti unendo poi i risultati. Si vedano i metodi delle correnti ad anello e dei potenziali ai nodi.

18 Metodi di eliminazione delle tensioni e delle correnti

Metodo di eliminazione delle tensioni. Sia data una rete lineare piana in cui tutti i lati sono sede di bipoli riconducibili a generatori affini di tensione. Ci sono n nodi e m anelli. Posso scrivere $n - 1$ equazioni usando la LKC e m equazioni usando la LKT. Alle l equazioni precedenti aggiungo le l equazioni tipologiche dei bipoli. Posso quindi eliminare le tensioni ottenendo un sistema di l equazioni nelle l correnti.

- m equazioni saranno del tipo: $\sum \pm R I = \sum \pm E$
- $n - 1$ equazioni saranno del tipo: $\sum \pm I = 0$

Metodo di eliminazione delle correnti. Sia data una rete lineare piana in cui tutti i lati sono sede di bipoli riconducibili a generatori affini di corrente. Ci sono n nodi, m anelli e l bipoli. Posso scrivere $n - 1$ equazioni usando la LKC e m equazioni usando la LKT. Alle l equazioni precedenti aggiungo le l equazioni tipologiche dei bipoli. Posso quindi eliminare le correnti ottenendo un sistema di l equazioni sulle l tensioni.

- $n - 1$ equazioni saranno del tipo: $\sum \pm G V = \sum \pm J$
- m equazioni saranno del tipo: $\sum \pm V = 0$

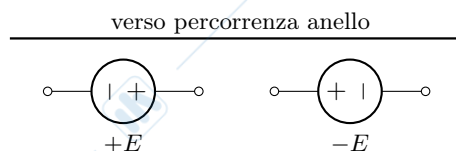
19 Metodo delle correnti di anello

Consideriamo in una rete piana con tutti i lati riconducibili a generatori affini di tensione gli m anelli interni (che sono un sistema di maglie indipendenti) e le m correnti cicliche di anello, scelte con lo stesso verso per tutti gli anelli. Le correnti dei lati sono costituite da una corrente di anello o dalla differenza di due correnti di anello. Riscrivo le LKT in funzione delle correnti di anello e ottengo un sistema con m equazioni del tipo:

$$R_{Akk} I_{Ak} - \sum_h R_{Akh} I_{Ah} = E_{Ak}$$

Dove:

- R_{Akk} è la somma di tutte le resistenze dell'anello k -esimo;
- R_{Akh} è la somma di tutte le resistenze dei lati in comune fra A_k e A_h ;
- E_{Ak} è la somma algebrica di tutte le forze elettromotrici dei lati dell'anello A_k .



20 Metodo dei potenziali ai nodi

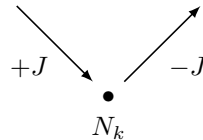
Consideriamo una rete qualsiasi dove tutti i lati sono riconducibili a GAC. Scegliamo un nodo di massa avente potenziale nullo. Esprimiamo quindi tutte le tensioni in funzione degli $n - 1$

potenziali ai nodi indipendenti. Effettuo le sostituzioni nella LKC e ottengo un sistema di $n - 1$ equazioni del tipo:

$$G_{Nkk} V_{Nk} - \sum_h G_{Nkh} V_{Nh} = J_{Nk}$$

Dove:

- G_{Nkk} è la somma di tutte le conduttanze dei lati appoggiati a N_k ;
- G_{Nkh} è la somma di tutte le conduttanze dei lati appoggiati alla coppia N_k e N_h ;
- J_{Nk} è la somma algebrica delle correnti impresse dai lati appoggiati a N_k .



21 Teorema di sovrapposizione degli effetti

Teorema di sovrapposizione degli effetti. In una rete lineare la tensione (o corrente) del generico lato h è uguale alla somma delle tensioni (o correnti) che si ottengono in quel lato facendo agire uno alla volta i generatori ideali della rete (in una rete con l lati avrà r lati con GIT e s lati con GIC). Non si può applicare alle potenze.

$$\begin{cases} V_h = \sum_{k=1}^r H_{Vhk} E_k + \sum_{k=s}^l H_{Rhk} J_k \\ I_h = \sum_{k=1}^r H_{Ghk} E_k + \sum_{k=s}^l H_{Ihk} J_k \end{cases}$$

I coefficienti H si chiamano coefficienti di rete:

H_{Vhk} rapporto adimensionale tra V_h e E_k , rapporto di tensione fra i lati a_h e a_k ;

H_{Rhk} rapporto con dimensione $[\Omega]$ tra V_h e la corrente impressa J_k , resistenza mutua tra a_h e a_k ;

H_{Ghk} rapporto con dimensione $[S]$ tra I_h e la tensione E_k , conduttanza mutua tra a_h e a_k ;

H_{Ihk} rapporto adimensionale tra I_h e J_k , rapporto di corrente fra i lati a_h e a_k .

22 Teorema di reciprocità

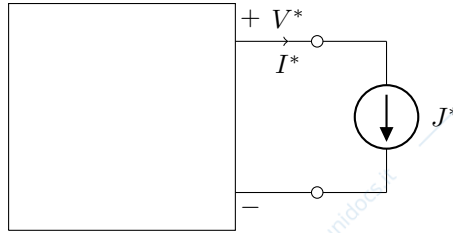
Teorema di reciprocità.

$$\begin{cases} H_{Rhk} = H_{Rkh} \\ H_{Ghk} = H_{Gkh} \\ H_{Vhk} = -H_{Ikh} \end{cases}$$

23 Teorema di Thevenin

Teorema di Thevenin. Consideriamo una rete accessibile solo a due nodi, in grado di funzionare a vuoto. Allora la porta rappresentata dai due nodi equivale a un GAT con equazione $V = E_{eq} - R_{eq} I$ dove E_{eq} equivale alla tensione a vuoto e R_{eq} è uguale alla resistenza interna, cioè al rapporto fra la tensione a vuoto e la corrente di cortocircuito.

Dimostrazione. Considero che la porta stia funzionando nel generico punto di lavoro V^*, I^* . La corrente posso pensarla come imposta da un GIC. Per la sovrapposizione degli effetti $V^* = V^{*'} + V^{*''}$. Dove $V^{*'}$ è la tensione a vuoto (senza J^*) e $V^{*''}$ è la tensione quando funziona solo J^* . Quindi $V^* = V_0 - R_i I^*$. \square



24 Teorema di Norton

Teorema di Norton. Questo teorema è duale a quello di Thevenin. Considero una rete accessibile solo da due nodi, funzionante in cortocircuito. Allora la porta equivale a un GAC con equazione $I = J_{eq} - G_{eq} V$ dove J_{eq} è la corrente di cortocircuito e G_{eq} è la conduttanza interna, cioè il rapporto fra la corrente di cortocircuito e la tensione a vuoto.

Dimostrazione. Si può sviluppare come per Thevenin oppure si può trasformare il GAT di Thevenin in un GAC utilizzando: $J_{eq} = \frac{E_{eq}}{R_{eq}}$ $G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$ \square

25 Doppi bipoli ideali inerti di ordine zero: reciprocità, simmetria, passività

Controllato in corrente

Indipendenti: i_1, i_2

Dipendenti: v_1, v_2

$$\begin{cases} v_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

Controllato in tensione

Indipendenti: v_1, v_2

Dipendenti: i_1, i_2

$$\begin{cases} i_1 = G_{11} v_1 + G_{12} v_2 \\ i_2 = G_{21} v_1 + G_{22} v_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Ibrido 1

Indipendenti: i_1, v_2

Dipendenti: v_1, i_2

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Ibrido 2

Indipendenti: v_1, i_2

Dipendenti: i_1, v_2

$$\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} i_2 \\ v_2 = g_{21} v_1 + g_{22} i_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

Trasmissione 1

Indipendenti: v_2, i_2

Dipendenti: v_1, i_1

$$\begin{cases} v_1 = A v_2 + B i_2 \\ i_1 = C v_2 + D i_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Trasmissione 2Indipendenti: v_1, i_1 Dipendenti: v_2, i_2

$$\begin{cases} v_2 = A' v_1 + B' i_1 \\ -i_2 = C' v_1 + D' i_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

Reciprocità Il rapporto di un effetto alla porta 1 e la sua causa alla porta 2 è uguale all'analogo invertito.

$$\left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \iff \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}$$

Le condizioni di reciprocità sono:

$$\begin{array}{lll} R_{12} = R_{21} & h_{12} = -h_{21} & AD - BC = 1 \\ G_{12} = G_{21} & g_{12} = -g_{21} & A'D' - B'C' = 1 \end{array}$$

Simmetria Le porte 1 e 2 possono essere scambiate. Implica la reciprocità. Valgono le condizioni precedenti più:

$$\begin{array}{lll} R_{11} = R_{22} & h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = 1 & A = D \\ G_{11} = G_{22} & g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} = 1 & A' = D' \end{array}$$

Passività La condizione è:

$$P = v_1 i_1 + v_2 i_2 \geq 0 \iff R_{11} \geq 0, \quad R_{22} \geq 0, \quad R_{11} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2} \right)^2$$

Dimostrazione.

$$P = R_{11} i_1^2 + (R_{12} + R_{21}) i_1 i_2 + R_{22} i_2^2 \geq 0$$

$$i_1 = 0 \implies R_{11} \geq 0$$

$$i_2 = 0 \implies R_{22} \geq 0$$

$$i_1, i_2 \neq 0 \implies R_{11} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2} \right)^2$$

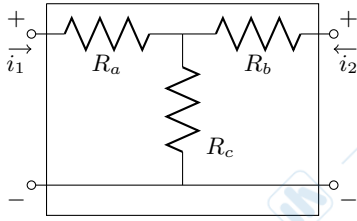
□

26 Proprietà e sintesi a T di un doppio bipolo resistivo

Deve essere:

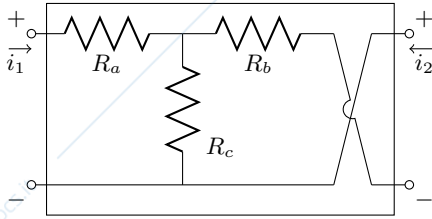
- Passivo $\implies R_{11} \geq 0, \quad R_{22} \geq 0, \quad R_{11} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2} \right)^2$
- Reciproco $\implies R_{12} = R_{21}$
- Non amplificatore $\implies R_{11} \geq |R_{21}|, \quad R_{22} \geq |R_{12}|$

Sintesi a stella (a T):



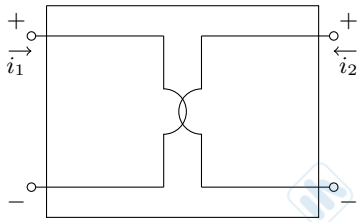
$$\begin{cases} v_1 = R_a i_1 + R_c i_c = (R_a + R_c) i_1 + R_c i_2 \\ v_2 = R_b i_2 + R_c i_c = (R_b + R_c) i_2 + R_c i_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_a = R_{11} - R_{12} \\ R_b = R_{22} - R_{21} \\ R_c = R_{12} = R_{21} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} R_a = R_{11} + R_{12} \\ R_b = R_{22} + R_{21} \\ R_c = -R_{12} = -R_{21} \end{cases}$$

27 Trasformatore ideale



$$v_1 = n v_2 \quad i_1 = -\frac{1}{n} i_2$$

dove n è il rapporto di trasformazione.

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

I parametri di \mathbf{R} e di \mathbf{G} sono infiniti.

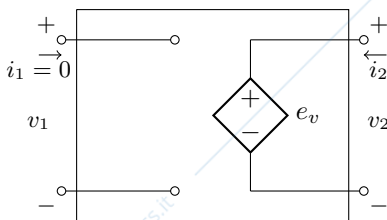
Il trasformatore ideale gode delle seguenti proprietà:

- è reciproco;
- non è simmetrico (tranne nel caso $n = 1$);
- è passivo - ha potenza nulla: $P = v_1 i_1 + v_2 i_2 = (n v_2)(-\frac{1}{n} i_2) + v_2 i_2 = 0$;
- il trasferimento di resistenza è: $R_{1eq} = n^2 R_2$,

28 Generatori pilotati in tensione e in corrente: equazioni caratteristiche

I generatori pilotati sono doppi bipoli attivi, non reciproci.

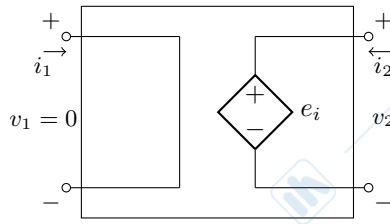
Generatore di tensione pilotato in tensione - GTPT:



$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = e_v = \alpha v_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

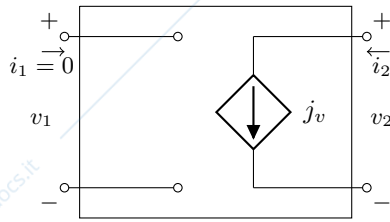
Generatore di tensione pilotato in corrente - GTPC:



$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = e_i = r i_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

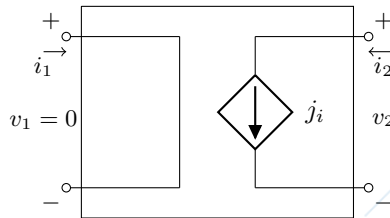
Generatore di corrente pilotato in tensione - GCPT:



$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = j_v = g v_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Generatore di corrente pilotato in corrente - GCPC:



$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = j_i = \beta v_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$

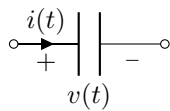
29 Funzione integrale di corrente

$$\theta(t) := \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad [A \cdot s] \quad \text{inoltre} \quad i(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

30 Funzione integrale di tensione

$$\lambda(t) := \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad [V \cdot s] \quad \text{inoltre} \quad v(t) = \frac{d\lambda}{dt}$$

31 Bipolo condensatore: proprietà generali

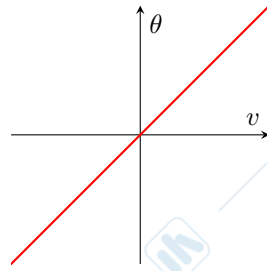


$\theta(t) = C v(t)$
con $C [F]$ capacità.

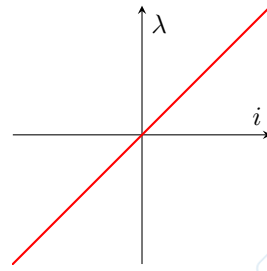
$$d\mathcal{L} = P dt = v \cdot i dt = v d\theta = v d(C \cdot v) = C v dv$$

$$\mathcal{L}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} C v dv = \frac{C v^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} C (v_2^2 - v_1^2)$$

con $v_1 = 0$ e $v_2 = V$ l'energia è $W_C = \frac{1}{2} C V^2$



Caratteristica condensatore



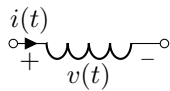
Caratteristica induttore

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

in regime stazionario $i(t) = 0 \Rightarrow$ circuito aperto

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

32 Bipolo induttore: proprietà generali



$\lambda(t) = L i(t)$
con $L [H]$ induttanza.

$$d\mathcal{L} = P dt = v \cdot i dt = i d\lambda = i d(L \cdot i) = L i di$$

$$\mathcal{L}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L i di = \frac{L i^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} L (i_2^2 - i_1^2)$$

con $i_1 = 0$ e $i_2 = I$ l'energia è $W_L = \frac{1}{2} L I^2$

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

in regime stazionario $v(t) = 0 \Rightarrow$ cortocircuito

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$$

33 Proprietà delle grandezze sinusoidali

Per poter usare metodi simili a quelli in regime stazionario dobbiamo usare tensioni e correnti tutte sinusoidali e isofrequenziali.

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{con } A_M \text{ ampiezza, } \omega \text{ pulsazione, } \alpha \text{ fase iniziale.}$$

Il valore efficace per funzioni periodiche è:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T a^2(t) dt} = \sqrt{a_M} \quad \text{con } a_M \text{ valor medio}$$

per grandezze sinusoidali:

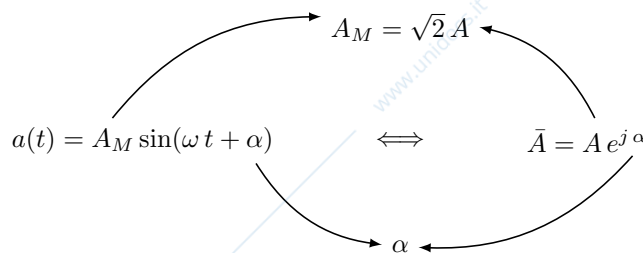
$$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

Fra due funzioni isofrequenziali è interessante lo sfasamento, cioè la differenza fra le fasi iniziali $\varphi = \alpha - \beta$.

$\varphi = 0$	$a(t)$ e $b(t)$ sono in fase;
$\varphi = \pm\pi$	$a(t)$ e $b(t)$ sono in opposizione di fase;
$\varphi > 0$	$a(t)$ è in anticipo su $b(t)$;
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$a(t)$ è in quadratura in anticipo su $b(t)$;
$\varphi < 0$	$a(t)$ è in ritardo su $b(t)$;
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$a(t)$ è in quadratura in ritardo su $b(t)$.

L'insieme delle funzioni sinusoidali isofrequenziali è *chiusa* sulle operazioni di addizione, moltiplicazione per una costante e derivazione temporale.

34 Rappresentazione fasoriale delle funzioni sinusoidali



$$A = \sqrt{\Re(\bar{A})^2 + \Im(\bar{A})^2} \quad \alpha = \begin{cases} \Re(\bar{A}) > 0 & \alpha = \arctan \frac{\Im(\bar{A})}{\Re(\bar{A})} \\ \Re(\bar{A}) < 0 & \begin{cases} \Im(\bar{A}) > 0 & \alpha = \arctan \frac{\Im(\bar{A})}{\Re(\bar{A})} + \pi \\ \Im(\bar{A}) < 0 & \alpha = \arctan \frac{\Im(\bar{A})}{\Re(\bar{A})} - \pi \end{cases} \end{cases}$$

La trasformazione è lineare. La derivata si trasforma: $c(t) = \frac{da(t)}{dt} \iff \bar{C} = j\omega \bar{A}$.

Richiami di algebra complessa:

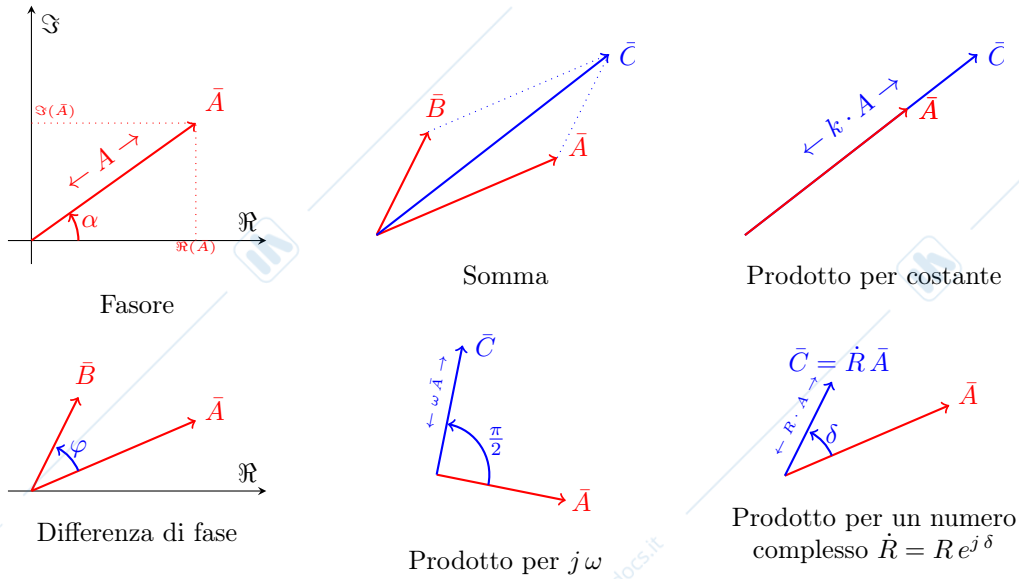
Somma: Somma delle parti reali e delle parti immaginarie.

Prodotto per costante: Moltiplico il modulo per la costante, se questa è negativa $\pm\pi$ alla fase. Se la costante è $j = \sqrt{-1}$ mi basta traslare la fase di $+\frac{\pi}{2}$.

Prodotto: $\bar{A} \cdot \bar{B} = AB e^{j(\alpha+\beta)} = \bar{C}$ dove \bar{C} è un numero complesso (non un fasore).

35 Rappresentazione del diagramma dei fasori

$$\bar{A} = A e^{j\alpha} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha = \Re(\bar{A}) + j \Im(\bar{A})$$



36 Potenza istantanea in regime sinusoidale

Utilizzando la convenzione degli utilizzatori:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \sin(\omega t + \alpha) \\ i(t) &= I_M \sin(\omega t + \beta) \\ \varphi &:= \alpha - \beta \end{aligned}$$

La potenza è periodica con $\omega' = 2\omega$.

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) i(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha) \cdot I_M \sin(\omega t + \beta) \\ &= \frac{V_M I_M}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{V_M I_M}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \\ &= \underbrace{VI \cos \varphi}_{\text{potenza media}} - \underbrace{VI \cos(2\omega t + \alpha + \beta)}_{\text{potenza fluttuante}} \quad [W] \end{aligned}$$

37 Potenza attiva, reattiva e apparente e complessa

Attiva $P := \frac{1}{T} \int_T p(t) dt$ ma dato che la potenza fluttuante è alternata il suo integrale è nullo e $P = VI \cos \varphi$ [W]. Questo risultato è simile al regime stazionario, solo che sto considerando anche lo sfasamento.

Con $\Delta t \gg T$ allora $\mathcal{L} = \int_{\Delta t} p(t) dt \approx \Delta t P$: è solo la potenza attiva che partecipa agli scambi energetici.

Reattiva $Q := VI \sin \varphi$ [VAR].

Apparente $A := VI$ [VA] si nota che $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Complessa $\dot{A} = \bar{V} \bar{I}^* = VI e^{j(\alpha - \beta)} = A e^{j\varphi} = A(\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ$

Dalla potenza complessa posso ricavare tutte le altre:

$$\begin{aligned} A &= |\dot{A}| & \varphi &= \arg(\dot{A}) \\ P &= \Re(\dot{A}) & Q &= \Im(\dot{A}) \end{aligned}$$

38 Comportamento di un resistore ideale in regime sinusoidale

$$v(t) = R i(t) = R, I_M \sin(\omega t + \beta) = V_M \sin(\omega t + \alpha)$$

$$R = \frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \implies \bar{V} = R \bar{I}$$

$$\alpha = \beta \implies \underbrace{\varphi = 0}_{\text{in fase}} \implies \underbrace{P = A = VI}_{\text{non negativa}}, \quad Q = 0$$

39 Comportamento di un condensatore ideale in regime sinusoidale

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \omega C V_M \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = I_M \sin(\omega t + \beta)$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} \implies \bar{V} = j X_C \bar{I}$$

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \implies \underbrace{\varphi = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}}_{\text{v quadratura in ritardo su i}} \implies P = 0, \quad Q = -A = -VI$$

$$\underbrace{X_C := -\frac{1}{\omega C} \quad [\Omega]}_{\text{Reattanza capacitiva}} \quad \underbrace{B_C := \omega C \quad [\text{S}]}_{\text{Suscettanza capacitiva}}$$

40 Comportamento di un induttore ideale in regime sinusoidale

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \omega L I_M \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}) = V_M \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\omega L = \frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} \implies \bar{V} = j X_L \bar{I}$$

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \implies \underbrace{\varphi = \alpha - \beta = +\frac{\pi}{2}}_{\text{v quadratura in anticipo su i}} \implies P = 0, \quad Q = A = VI$$

$$\underbrace{X_L := \omega L \quad [\Omega]}_{\text{Reattanza induttiva}} \quad \underbrace{B_L := -\frac{1}{\omega L} \quad [\text{S}]}_{\text{Suscettanza induttiva}}$$

41 Impedenza

$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} \quad \text{con} \quad \frac{V}{I} = Z$$

$$= \Re(\dot{Z}) + j \Im(\dot{Z})$$

$$\bar{V} = \dot{Z} \bar{I}$$

$$\dot{Z}_R = R + j0$$

$$\dot{Z}_L = 0 + j X_L$$

$$\dot{Z}_C = 0 + j X_C$$

$$\begin{cases} A = Z I^2 \\ \dot{A} = \dot{Z} I^2 \\ P = \Re(\dot{Z}) I^2 \\ Q = \Im(\dot{Z}) I^2 \end{cases}$$

42 Ammettenza

$$\dot{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{I}{V} e^{j\varphi'} \quad \text{con} \quad \frac{I}{V} = Y$$

$$= \Re(\dot{Y}) + j\Im(\dot{Y})$$

$$\bar{I} = \dot{Y} \bar{V}$$

$$\dot{Y}_R = G + j0$$

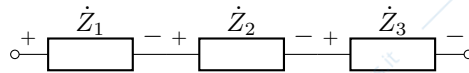
$$\dot{Y}_L = 0 + jB_L$$

$$\dot{Y}_C = 0 + jB_C$$

$$\begin{cases} A = Y I^2 \\ \dot{A} = \dot{Y} I^2 \\ P = \Re(\dot{Y}) I^2 \\ Q = -\Im(\dot{Y}) I^2 \end{cases}$$

Si noti che: $\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \begin{cases} Y = \frac{1}{Z} & \text{modulo} \\ \varphi' = -\varphi & \text{fase} \end{cases}$

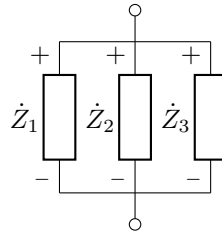
43 Sintesi serie di impedenze



$$\dot{Z}_s := \sum_{k=1}^l \dot{Z}_k \quad \dot{Y}_s = \frac{\Re(\dot{Z}_s)}{\Re(\dot{Z}_s)^2 + \Im(\dot{Z}_s)^2} + j \frac{-\Im(\dot{Z}_s)}{\Re(\dot{Z}_s)^2 + \Im(\dot{Z}_s)^2}$$

$$\bar{V} = \dot{Z} \bar{I} = (R_s + jX_s) \bar{I} \quad \begin{array}{l} \text{con } X_s > 0 \text{ ho una reattanza induttiva} \\ \text{con } X_s < 0 \text{ ho una reattanza capacitiva} \end{array}$$

44 Sintesi parallelo di ammettenze

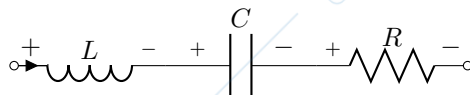


$$\dot{Y}_p := \sum_{k=1}^l \dot{Y}_k \quad \dot{Z}_p = \frac{\Re(\dot{Y}_p)}{\Re(\dot{Y}_p)^2 + \Im(\dot{Y}_p)^2} + j \frac{-\Im(\dot{Y}_p)}{\Re(\dot{Y}_p)^2 + \Im(\dot{Y}_p)^2}$$

$$\bar{I} = \dot{Y} \bar{V} = (R_p + jB_p) \bar{V} \quad \begin{array}{l} \text{con } B_p < 0, X_p > 0 \text{ ho una reattanza induttiva} \\ \text{con } B_p > 0, X_p < 0 \text{ ho una reattanza capacitiva} \end{array}$$

Ricordando che: $R_p = \frac{1}{G_p}$ e $X_p = -\frac{1}{B_p}$

45 Risonanza elettrica serie

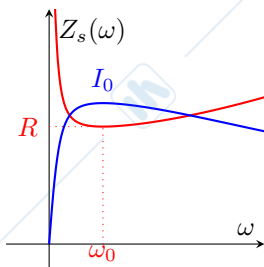


$$\dot{Z}_s = R + j(X_L + X_C)$$

$$\dot{Z}_s(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

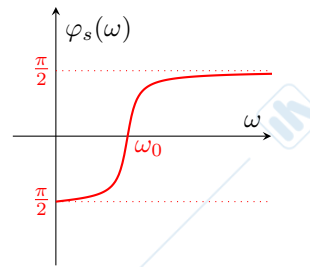
Modulo:

$$Z_s(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



Argomento:

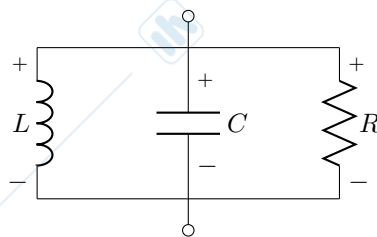
$$\varphi_s(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$



Con $\omega = \omega_0$ tale che $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ sono in *risonanza*, ω_0 si dice pulsazione di risonanza e vale $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Definisco $Q_0 := \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$ come fattore di merito.

- la serie LC si comporta come un cortocircuito;
- la corrente ha valore massimo $\bar{I}_L = \bar{I}_C = \bar{I}$;
- $\bar{V}_L = -\bar{V}_C$, $\bar{V}_s = \bar{V}_L + \bar{V}_C + \bar{V}_R = \bar{V}_R$;
- L e C continuano a scambiarsi energia, le loro potenze sono uguali e opposte: non scambiano potenza con la rete.

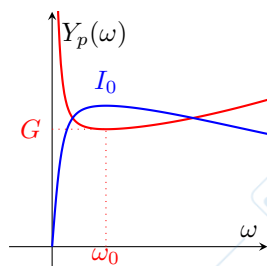
46 Risonanza elettrica parallelo



$$\begin{aligned} \dot{Y}_p &= G + j(B_L + B_C) \\ \dot{Y}_p(\omega) &= G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{aligned}$$

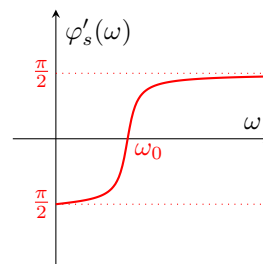
Modulo:

$$Y_p(\omega) = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$



Argomento:

$$\varphi'_p(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)$$

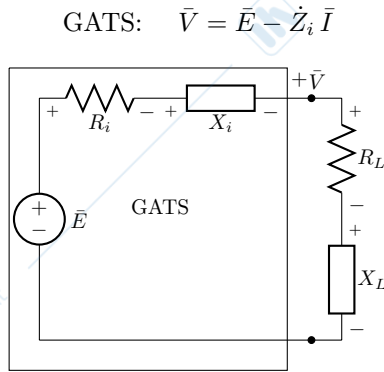


Con $\omega = \omega_0$ tale che $\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$ sono in *antirisonanza*, ω_0 si dice pulsazione di antirisonanza e vale $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Definisco $Q_0 := \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G}$ come fattore di merito.

- il parallelo LC si comporta come un circuito aperto;
- $\bar{I}_L = -\bar{I}_C$, $\bar{I}_p = \bar{I}_R$;

47 Adattamento di carico in regime sinusoidale

Lo definisco per la potenza attiva cioè l'unica che vale in intervalli di tempo lunghi. Un generatore affine di tensione simbolico (GATS) eroga massima potenza quando è collegato a un'impedenza equivalente che è uguale al coniugato dell'impedenza del generatore: $\dot{Z}_L = \dot{Z}_i^*$. Inoltre tale potenza vale: $P_{max} = \frac{E^2}{4 \Re(Z_i)}$.



$$\bar{E} = (\dot{Z}_i + \dot{Z}_L) \bar{I} \implies \bar{I} = \frac{\bar{E}}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_L)} = \frac{\bar{E}}{(R_i + R_L) + j(X_i + X_L)}$$

$$P_L = \Re(\dot{Z}_L) I^2 = R_L I^2 = \frac{R_L E^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$$

massimo con $X_i = -X_L$ e $R_i = R_L$

$$\implies P_{max} = \frac{E^2}{4 R_i}$$

48 Doppio bipolo induttivo e suo comportamento in regime sinusoidale

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 \end{cases}$$

rappresentazione controllata in corrente

è sempre reciproco:

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} jX_{L1} & jX_M \\ jX_M & jX_{L2} \end{bmatrix}$$

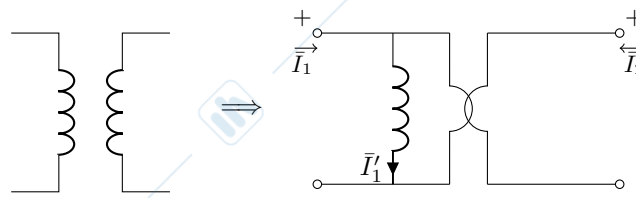
Assomiglia al trasformatore ideale che era:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n \bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases}$$

con $\bar{I}_2 = 0$ (porta 2 aperta) $\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{L_1}{M} = n \implies \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} \implies M^2 = L_1 L_2$

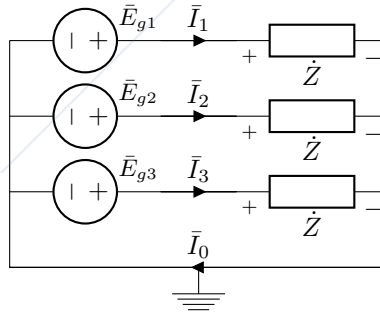
con $\bar{V}_2 = 0$ (porta 2 in corto) $j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 = 0 \implies \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{L_2}{M} = -\frac{1}{n} \implies n = \frac{M}{L_2}$

Il doppio bipolo induttivo può essere schematizzato con un trasformatore ideale:



49 Terne di tensioni: definizioni fondamentali

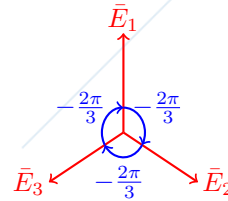
Ho tre generatori ideali di tensione che imprimono tensioni con ampiezze uguali e sfasate reciprocamente di $\frac{2\pi}{3}$ radianti. Ho tre bipoli passivi uguali con tutti la stessa impedenza \dot{Z} .



Terna di tensioni stellate:

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = \bar{V}_{10} = \bar{E}_{g1} = E e^{j\alpha} \\ \bar{E}_2 = \bar{V}_{20} = \bar{E}_{g2} = E e^{j(\alpha - \frac{2\pi}{3})} \\ \bar{E}_3 = \bar{V}_{30} = \bar{E}_{g3} = E e^{j(\alpha - \frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$ la somma è nulla.

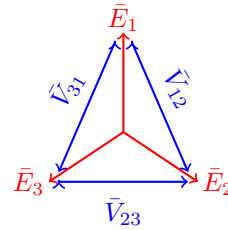


La terna è simmetrica

Terna di tensioni concatenate:

$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \\ \bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 \\ \bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 \end{cases}$$

$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$ la somma è nulla.



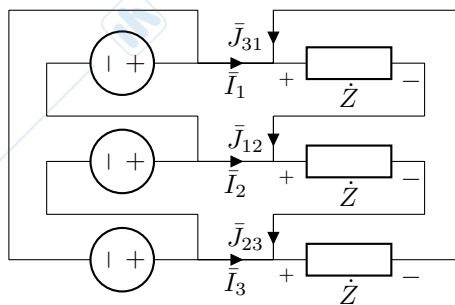
vale la relazione $V = \sqrt{3} E$ con V valore efficace delle tensioni concatenate ed E valore efficace delle tensioni stellate.

Con elevate tensioni a parità di potenza ho correnti minori quindi:

- meno cadute di tensione;
- meno perdite ohmiche;
- aumenta rendimento;
- conduttori più sottili \implies risparmio di materiale.

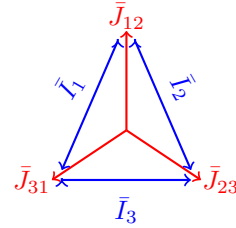
50 Connessioni di generatori e carichi

$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_0$, se ho $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3$ allora automaticamente $\bar{I}_0 = 0$ quindi posso omettere il collegamento neutro (risparmiando così 1/4 del materiale conduttore necessario a costruire la rete). Questa prende il nome di topologia a triangolo:



$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 &= 0 \\ I &= \sqrt{3} J \end{aligned}$$



I lati del triangolo sono le fasi interne.

Le tensioni stellate non sono definite mentre le tensioni concatenate sono uguali a quelle impresse ($\bar{V}_{12} = \bar{E}_{g1}$, $\bar{V}_{23} = \bar{E}_{g2}$, $\bar{V}_{31} = \bar{E}_{g3}$). In condizioni di simmetria i centri stella sono tutti equipotenziali e quindi è come se ci fosse un neutro virtuale. Quindi posso usare una delle tre linee come rete monofase equivalente.

51 Potenza nei sistemi trifase

Ogni componente della rete trifase lo considero come un quadripolo. La potenza istantanea vale: $p(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t)$, sviluppando posso scrivere: $p(t) = P + p_f(t)$.

Nelle condizioni di simmetria ed equilibrio $p_f(t)$ è nulla e quindi rimane la potenza attiva:

Potenza attiva (media) $P = 3 E I \cos \varphi = \sqrt{3} V I \cos \varphi = p(t)$ costante nel tempo

Potenza reattiva $Q = 3 E I \sin \varphi = \sqrt{3} V I \sin \varphi$

Potenza apparente $A = 3 E I = \sqrt{3} V I$

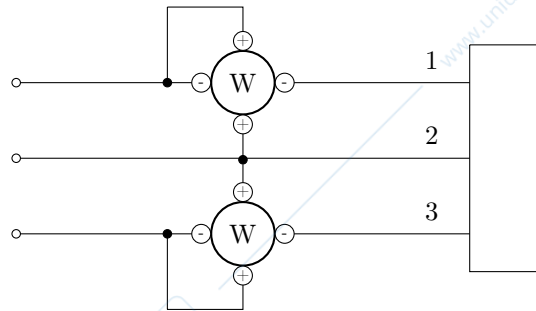
52 Misure di potenza nei sistemi trifase: inserzione Aron

Se ho il neutro posso inserire un wattmetro per ogni linea.

Se non ho il neutro considero il carico come un doppio bipolo con un morsetto in comune.

$$\begin{aligned} p(t) = v_{12}(t) i_1(t) + v_{32}(t) i_3(t) &\implies P = V I (\cos \varphi_{12} + \cos \varphi_{32}) = p(t) \\ Q &= V I (\sin \varphi_{12} + \sin \varphi_{32}) \end{aligned}$$

Per fare la misura collego due wattmetri con l'inserzione Aron.



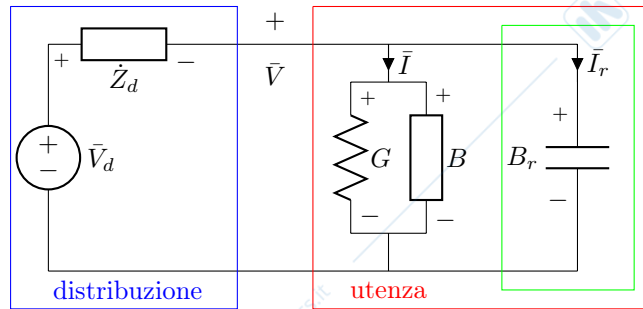
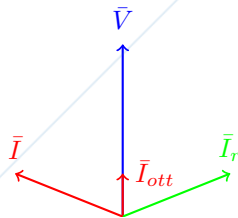
$$P = P_{W12} + P_{W32} \quad Q = \sqrt{3} (P_{W12} - P_{W32})$$

Se la rete è equilibrata e simmetrica l'inserzione Aron vale anche con il neutro

53 Rifasamento in regime trifase

La condizione di funzionamento ottimale è quando la potenza reattiva è nulla, quindi tensione e correnti sono in fase. Una rete domestica può avere comportamenti ohmici-reattivi e quindi può sfasare la corrente. Occorre quindi rifasarla.

Per farlo si connette in parallelo un bipolo che assorba sempre corrente opposto alla componente in quadratura del carico $\bar{I}_r = -I \sin \varphi$ in modo che la corrente totale sia $\bar{I}_l = \bar{I} + \bar{I}_r = \bar{I}_{ott}$.



$$B_r = -B \text{ deve esserci antirisonanza}$$

$$\omega C_r = -B = \frac{\sin \varphi}{z_u} = G \tan \varphi$$

$$|Q_r| = P \tan \varphi \implies C_r = \frac{P \tan \varphi}{\omega V^2}$$

54 Sistemi di equazioni differenziali (reti in regime variabile)

Per iniziare lo studio di una rete a regime variabile per $t > 0$ devo scrivere le equazioni topologiche e tipologiche della rete. Per i componenti dinamici considero le equazioni differenziali.

$\begin{cases} v(t) = e(t) \\ i(t) = j(t) \\ v(t) = R i(t) \\ i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \\ v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$	GIT	Inoltre vale Kirchoff: $\begin{cases} \sum \pm i(t) = 0 & LKC \\ \sum \pm v(t) = 0 & LKT \end{cases}$
	GIC	
	R	
	C	
	L	

Otengo quindi un sistema di $2l$ equazioni differenziali nelle $2l$ uscite della rete. Possiamo trasformare il sistema in maniera che ognuna delle $2l$ equazioni comprenda una sola uscita:

$$\sum_{i=0}^n a_i \underbrace{\frac{d^i y_h}{dt^i}}_{\text{uscita}} = \sum_{k=1}^q \sum_{i=0}^{m_k} b_{ki} \underbrace{\frac{d^i x_k}{dt^i}}_{\text{ingressi}}$$

55 Impostazione generale dell'analisi di reti in regime variabile

La soluzione di ciascuna equazione differenziale si può scrivere come somma $y(t) = y_p + y_o$ dove y_p è una soluzione particolare e y_o è la soluzione dell'omogenea associata. Nonostante il

sistema originale sia lineare, quando imponiamo i valori iniziali non nulli introduciamo delle non linearità e non possiamo quindi usare la sovrapposizione degli effetti.

- Se $y(0^+) = 0$ la soluzione per $t > 0$ è detta *risposta forzata* perché dovuta solo agli ingressi. In particolare $y(t) = y_f(t) = y_{fp} + y_{fo}$. L'equazione è lineare, vale la sovrapposizione degli effetti e la usiamo per calcolare y_{fp} di ogni singolo ingresso.
- Se tutti gli ingressi sono nulli e $y(0^+) \neq 0$ la soluzione per $t > 0$ è detta *risposta libera* perché non è dovuta agli ingressi. L'equazione non è lineare ma la possiamo linearizzare per applicare la sovrapposizione degli effetti.
- In generale ho ingressi non nulli e $y(0^+) \neq 0$ e $y(t) = y_f + y_l$. Possiamo applicare la sovrapposizione degli effetti per trovare prima la y_f e poi la y_l .

$$y(t) = \underbrace{y_{fp} + y_{fo}}_{\text{forzata}} + \underbrace{y_l}_{{\text{libera}}$$

56 Integrale particolare

Con ingressi canonici (costanti o sinusoidali) basta analizzare la rete a regime, quindi una soluzione particolare coincide con la rete in regime stazionario o sinusoidale.

57 Integrale dell'omogenea associata

L'omogenea associata all'equazione differenziale si ottiene azzerando il termine noto.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_h}{dt^i} = 0$$

A questa associa l'equazione caratteristica $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 s^0$ che ammette n radici complesse del tipo $s_i = \sigma_i \pm j \omega_i$

Radici reali singole a $s_i = \omega_i$ corrisponde un modo normale $y_i(t) = Y_i e^{\sigma_i t}$

Radici complesse coniugate a una coppia $s_i = \sigma_i \pm j \omega_i$ corrisponde un modo normale $y_i(t) = e^{\sigma_i t} (Y_{si} \sin(\omega_i t) + Y_{ci} \cos(\omega_i t))$

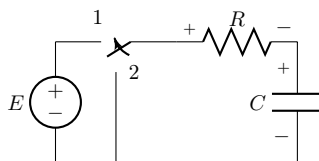
Con Y_i, Y_{si}, Y_{ci} costanti di integrazione.

La soluzione dell'omogenea associata corrisponde alla somma di tutti i modi normali. Per le molteplicità multiple devo moltiplicare il modo per una potenza di t .

58 Determinazione dell'uscita e calcolo delle costanti

L'uscita è rappresentata dalla somma della soluzione dell'omogenea e di quella particolare. Nella soluzione dell'omogenea sono presenti delle costanti di integrazione (sono n) che si possono trovare ponendo l'uscita (e le sue $n - 1$ derivate) uguale al suo valore in $t = 0^+$.

59 Rete RC con generatore stazionario



Carica da stato non nullo (da 2 a 1 con V ai capi di C):

con $t < 0$: $v_C = V$ quindi $v_C(0^-) = V = v_C(0^+)$.

con $t > 0$: $E = v_R + v_C$, $i_R = i_C$, $v_R = R i_R$, $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$.

Da queste ricavo:

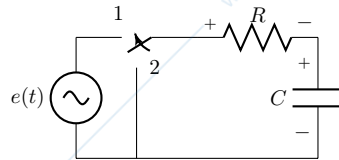
$$\left. \begin{aligned} E &= v_C + RC \frac{dv_C}{dt} & v_C(t) &= v_{C_o} + v_{C_p} & v_{C_p} &= E \\ RCs + 1 &= 0 & s &= -\frac{1}{RC} & v_{C_o} &= V_o e^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned} \right\} v_C(t) = E + V_o e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Per trovare V_o pongo $V_C(0^+) = V$ quindi $V_o = V - E$. In definitiva:

$$v_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) + V e^{-\frac{1}{RC}t} = \underbrace{E - E e^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{dovuto a ingressi non nulli}} + \underbrace{V e^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{dovuto a stato iniziale non nullo}}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

60 Rete RC con generatore sinusoidale



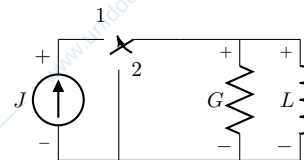
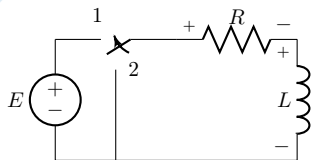
Carica da stato non nullo (da 2 a 1 con V ai capi di C):

con $t < 0$: $v_C = V$ quindi $v_C(0^-) = V = v_C(0^+)$.

con $t > 0$: $\bar{E} = \bar{V}_R + \bar{V}_C$, $\bar{I}_R = \bar{I}_C$, $\bar{V}_R = R \bar{I}_R$, $i_c = C \frac{dv_C}{dt}$.

Esattamente come in regime stazionario ricavo $e(t) = v_C + RC \frac{dv_C}{dt}$. La soluzione particolare $v_{C_p} = e(t)$. Poi trovo l'omogenea e così via (i procedimenti sono identici al regime stazionario).

61 Rete RL e GL con generatore stazionario



Le due reti sono equivalenti ponendo $R = \frac{1}{G}$ e $E = RJ$. Uso la rete GL per sfruttare la dualità con il caso RC.

Carica da stato nullo (da 2 a 1 con 0 ai capi di L):

con $t < 0$: $i_L(0^-) = 0$.

con $t > 0$: $i_G + i_L = J$ $v_G = v_L$ $i_G = G v_G$ $v_L = L \frac{di_L}{dt}$.

Ricavo l'equazione differenziale: $GL \frac{di_L}{dt} + i_L = J$ $i_{L_p} = J$

l'omogenea: $GLs + 1 = 0$ $s = -\frac{1}{GL}$ $i_{L_o}(t) = I_o e^{-\frac{t}{GL}}$ quindi $i_L = J + I_o e^{-\frac{t}{GL}}$.

Impongo le condizioni iniziali $i_L(0^+) = 0$ e ottengo $I_o = -J$.

In definitiva:

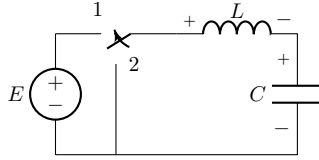
$$i_L = J \left(1 - e^{-\frac{t}{GL}} \right)$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} = \frac{J}{G} e^{-\frac{t}{GL}}$$

62 Rete RL con generatore sinusoidale

Stessi procedimenti del regime stazionario.

63 Rete LC con generatore stazionario



Carica da stato nullo (da 2 a 1 con 0 ai capi di C):

con $t < 0$: $i(0^-) = 00$, $v(0^-) = 0$.

con $t > 0$: $E = v_L + v_C$, $i_L = i_C$, $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$, $v_L = L \frac{di_L}{dt}$.

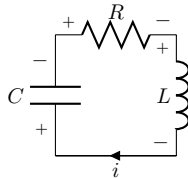
$$2 \text{ eq. differenziali: } \begin{cases} E = v_C + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} \implies LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C = E \\ i_L = C \frac{E}{dt} - LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} \implies LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L = C \frac{dE}{dt} \end{cases}$$

$$v_{Cp} = E \quad LC s^2 + 1 = 0 \quad s^2 = -\frac{1}{LC} = j \frac{1}{\sqrt{LC}} = j\omega_0 \quad v_{Co} = V_{oc} \cos(\omega_0 t) + V_{os} \sin(\omega_0 t)$$

$$i_{Lp} = E \quad LC s^2 + 1 = 0 \quad s^2 = j\omega_0 \quad i_{Lo} = I_{oc} \cos(\omega_0 t) + I_{os} \sin(\omega_0 t)$$

Ricordando che $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ è la pulsazione di risonanza.

64 Rete RLC serie con generatore stazionario: caso sovracritico (sovrasmorzato)



$$\left. \begin{array}{l} v_C + v_L + v_R = 0 \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_R = R i_R \end{array} \right\} \text{ ottengo: } \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \implies \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

Con $\alpha = \frac{1}{T} = \frac{R}{2L}$ costante di smorzamento, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsazione naturale non smorzata, $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ resistenza critica, $\xi = \frac{R}{R_c} = \frac{\alpha}{\omega_0}$ fattore di smorzamento.

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \implies s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

A seconda del segno del discriminante $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$ distinguo 3 casi:

(A) $R > R_c$ ($\xi > 1$) $\implies s_{1,2} = -\alpha \pm \alpha_s$ (2 radici reali distinte) con $\alpha_s = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$;

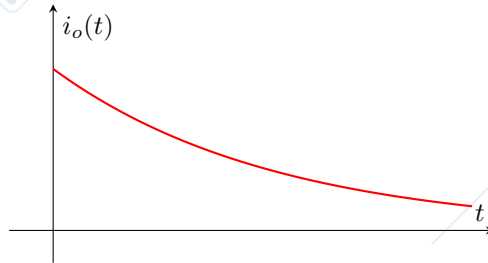
(B) $R = R_c$ ($\xi = 1$) $\implies s_{1,2} = -\alpha$ (2 radici reali coincidenti);

(C) $R < R_c$ ($\xi < 1$) $\implies s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_s$ (2 radici complesse coniugate) con $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

(A) CASO SOPRACRITICO (SOVRASMORZATO):

$$\text{con } T_g = -\frac{1}{s_1} = \frac{1}{\alpha - \alpha_s} \implies i_o(t) = T_g e^{-\frac{t}{T_g}} + I_p e^{-\frac{t}{T_p}}$$

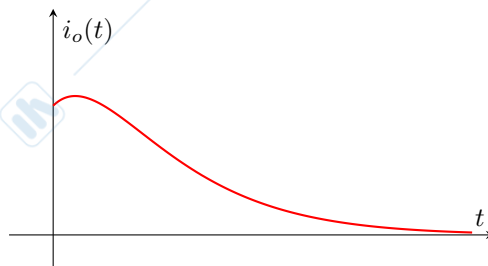
$$\text{e } T_p = -\frac{1}{s_2} = \frac{1}{\alpha - \alpha_s}$$



65 Rete RLC serie con generatore stazionario: caso critico

(B) CASO CRITICO:

$$T = -\frac{1}{s_{1,2}} = \frac{1}{\alpha} \implies i_o(t) = I_o e^{-\frac{t}{T}} + K_o t e^{-\frac{t}{T}}$$

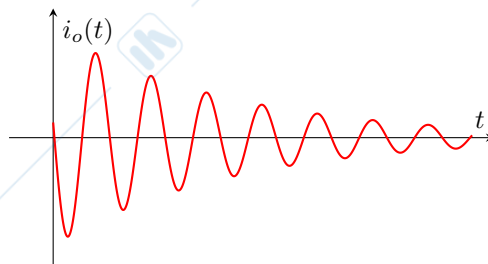


66 Rete RLC serie con generatore stazionario: caso sottocritico (sottosmorzato)

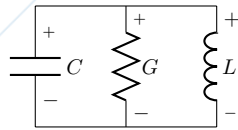
(C) CASO SOTTOCRITICO (SOTTOSMORZATO):

$$s_1 = -\alpha + j\omega_s = -\frac{1}{T} + j\omega_s \implies i_o(t) = I_o e^{-\frac{t}{T}} \sin(\omega_s t + \beta)$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_s = -\frac{1}{T} - j\omega_s$$



67 Rete GLC parallelo con generatore stazionario: evoluzione libera



Rete duale a RLC prendendo $\alpha = \frac{1}{T} = \frac{G}{2C}$ costante di smorzamento, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsazione naturale non smorzata, $G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ resistenza critica, $\xi = \frac{G}{G_c} = \frac{\alpha}{\omega_0}$ fattore di smorzamento.