



082742 – Elettrotecnica (E-O)

Prof. F. Bizzarri

Esame, 23 Luglio 2012

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____ Firma _____

AVVERTENZE

- La prova dura 3 ore.
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante. Un punteggio inferiore a 16 invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2 punti	E2a 2 punti	E2b, 2 punti	E2c, 3 punti	E2d 1 punto	E3a 6 punti	E3b 2 punti	E4a 7 punti	E4b 3 punti	Voto Finale
Voto										

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1

Enunciare e discutere (anche graficamente) la legge di Ampere-Laplace.

Il campo magnetico \vec{B} generato da una spira percorse da corrente costante I , di forma qualunque e nel vuoto è dato da

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_c}{r^2} dl$$



le linee di forza di \vec{B} sono chiuse attorno alle spire e orientate secondo la regola della mano dx

(notazione
occlusa)

\hat{u}_T versore tangente all'asse della spira.

$$d\vec{B} = k_{ml} I \hat{u}_T \times \hat{u}_c \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{u}_T \times \hat{u}_c \frac{dl}{r^2}$$

E2a

Per il circuito in Figura 1, per il quale si assume l'evoluzione in regime sinusoidale con $a(t) = A \cos(\omega t)$, si determini il fasore corrispondente alla corrente $i_L(t)$.

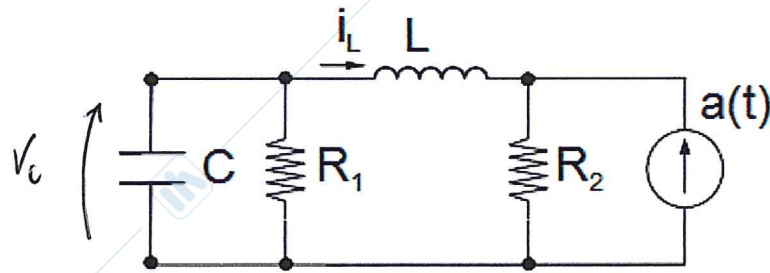


Figura 1

$$\begin{cases} \bar{V}_c - j\omega L \bar{i}_L - (\bar{i}_L + A) R_2 = 0 \\ j\omega C \bar{V}_c + \bar{i}_L + \bar{V}_c / R_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{V}_c \left(\frac{1 + j\omega C R_1}{R_1} \right) = -\bar{i}_L$$

$$\left[-\left(\frac{1 + j\omega C R_1}{R_1} \right)^{-1} - j\omega L - R_2 \right] \bar{i}_L = A R_2$$

$$\bar{i}_L = - \frac{A R_2 (1 + j\omega C R_1)}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 L C + j\omega R_1 R_2 C + j\omega L} =$$

$$= - \frac{A R_2 (1 + j\omega R_1 C)}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 L C + j\omega (R_1 R_2 C + L)}$$

E2b

Per $C=1F$, $L=2H$, $R_1=1\Omega$, $R_2=2\Omega$, si determini l'espressione della corrente $i_L(t)$ il cui fasore è stato calcolato al punto E2a

$$\bar{I}_L = - \frac{A \cdot 2 (1+j\omega)}{3 - \omega^2 \cdot 2 + j\omega (2+2)} = - \frac{2A (1+j\omega)}{3 + j4\omega - 2\omega^2}$$

$$i_L(t) = \text{Re} \left\{ - \frac{2A (1+j\omega)}{3 - 2\omega^2 + j4\omega} e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= -2A \text{Re} \left\{ \frac{(1+j\omega)(3 - 2\omega^2 - j4\omega)}{(3 - 2\omega^2)^2 + 16\omega^2} e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= -2A \text{Re} \left\{ \frac{3 - 2\omega^2 + 4\omega^2 + j(3\omega - 2\omega^3 - 4\omega)}{(3 - 2\omega^2)^2 + 16\omega^2} e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= - \frac{2A}{(3 - 2\omega^2)^2 + 16\omega^2} \left[(3 + 2\omega^2) \cos \omega t + (2\omega^3 + \omega) \sin \omega t \right]$$

E2c

Per il circuito in Figura 2, per il quale si assume l'evoluzione in regime sinusoidale con $a(t)=A\cos(\omega t)$, $\omega=2 \text{ rad/s}$, $C=1F$, $L=2H$, $R_1=1\Omega$, $R_2=2\Omega$, si calcoli il valore della capacità C_{RIF} tale da rendere nulla la potenza reattiva erogata dal generatore di corrente.

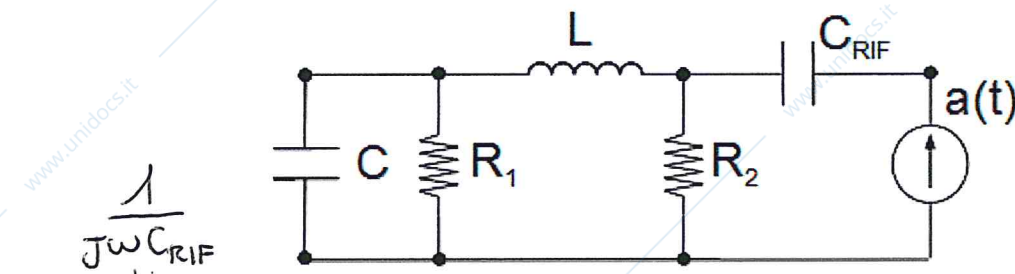


Figura 2

$$Z(j\omega) = \left(\frac{1}{1+j\omega} + j2\omega \right) // R_2 =$$

$$= \frac{1 - 2\omega^2 + j2\omega}{1+j\omega} // R_2 = \frac{1+j\omega}{1 - 2\omega^2 + j2\omega} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2(1 - 2\omega^2 + j2\omega)}{2 + j2\omega + 1 - 2\omega^2 + j2\omega} =$$

$$\frac{2(1 - 2w^2 + j2w)}{3 + 4jw - 2w^2} \quad \text{con } w = 2 \cos \frac{\pi}{6} \quad Z(2j) = \frac{2(1 - 8 + 4j)}{3 + 8j - 8} =$$

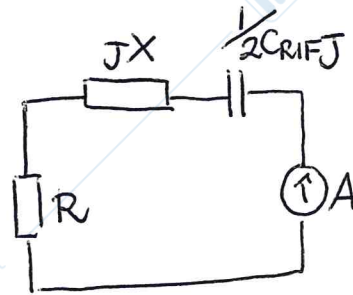
$$= \frac{2(4j - 7)}{8j - 5}$$

$$Z(2j) = \frac{2(4j - 7)(-8j - 5)}{64 + 25} = \frac{2}{89} (-32j^2 - 20j + 56j + 35) =$$

$$= \frac{2}{89} (36j + 67)$$

$$\text{Im} \{ Z(2j) \} = X(2j) = \frac{72}{89}$$

$$\text{Re} \{ Z(2j) \} = R(2j) = \frac{134}{89}$$



$$jX + \frac{1}{2jC_{RIF}} = 0 \quad j\left(X - \frac{1}{2C_{RIF}}\right) = 0 \quad C_{RIF} = \frac{89}{72} \cdot \frac{1}{2} \text{ F}$$

E2c

Nelle ipotesi al punto E2b e per il valore di C_{RIF} calcolato al passo precedente, quanto vale la potenza complessa erogata dal generatore di corrente?

$$P + jQ \equiv P = \frac{1}{2} A^2 \cdot R = \frac{1}{2} A^2 \cdot \frac{134}{89} = \frac{67}{89} A^2$$

E3a

Il circuito in Figura 3 evolve in regime stazionario immediatamente prima dell'istante $t = 0$ in cui l'interruttore si chiude e il generatore di tensione presenta una discontinuità. Determinare $i(t)$ per $t > 0$ sapendo che $V_{C_2}(-\infty) = 0$, $e(t) = E_1$ per $t < 0$, $e(t) = E_2$ per $t > 0$. $R_1 + R_2 - \tau > 0$

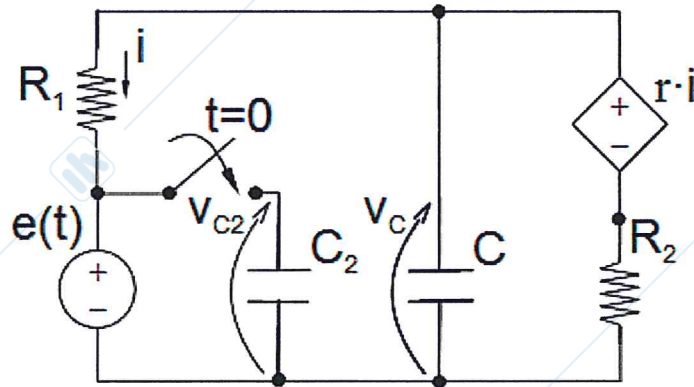


Figura 3

$$\text{in } t = 0^- \quad C \frac{dV_c}{dt} \equiv 0$$

$$e(t) \Big|_{t=0^-} = E_1 \quad E_1 + R_1 i(0^-) - \tau i(0^-) + R_2 i(0^-) = 0$$

$$i(0^-) = - \frac{E_1}{R_1 + R_2 - \tau}$$

$$V_c(0^-) = \tau i(0^-) - R_2 i(0^-) = \frac{E_1 (R_2 - \tau)}{R_1 + R_2 - \tau}$$

in $t = 0$ $e(t)$ è discontinuo di prima specie e quindi (poiché le variabili di stato è più continue degli ingressi) $V_c(0^-) = V_c(0^+)$

$$i(0^+) R_1 + E_2 = V_c(0^+) = V_c(0^-)$$

$$i(0^+) = \frac{1}{R_1} \left[\frac{E_1 (R_2 - \tau)}{R_1 + R_2 - \tau} - E_2 \right]$$

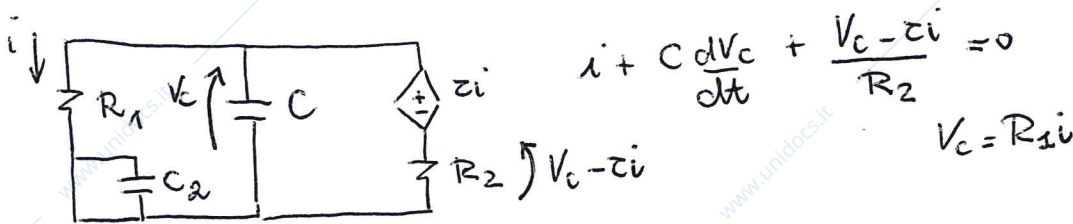
V_{C_2} non è variabile di stato perché $V_{C_2} = e(t)$

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} \Big|_{t > 0} = 0 \rightarrow i_{C_2} \Big|_{t > 0} = 0$$

$i(t) = -\frac{E_2}{R_1+R_2-\tau}$ infatti si raggiunge il regime stazionario e C_2 in parallelo ad $e(t)$ non ha alcun effetto su $i(t)$

$$t > 0 \quad i(t) = -\frac{E_2}{R_1+R_2-\tau} + \left(i(0^+) - i(t) \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Per trovare τ posso partire da $e(t)$:



$$i + R_1 C \frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1 - \tau}{R_2} \right) i = 0 \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_1 C} \left(\frac{\tau - R_1 - R_2}{R_2} \right) i$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R_1 C} \left(\frac{\tau - R_1 - R_2}{R_2} \right) i = -\frac{1}{\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2 - \tau}} i$$

$$\tau = +\frac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2 - \tau} > 0$$

E3b

Calcolare la potenza istantanea $p_E(t)$ erogata dal generatore di tensione in Figura 3 per $t > 0$.

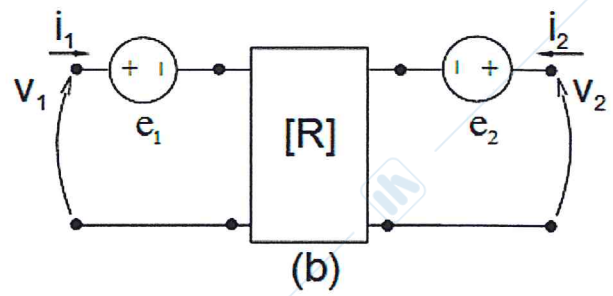
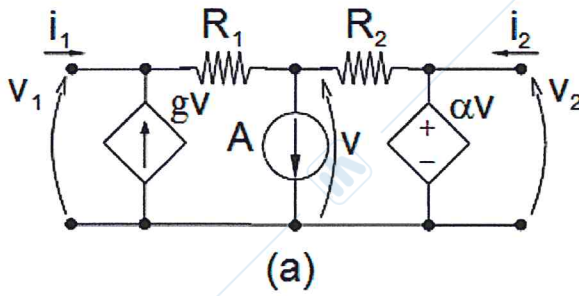
Per $t > 0$ $i_{C2} = C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} \equiv \emptyset$

$$P_E(t) \Big|_{t > 0} = -E_2 \cdot i(t) =$$

$$-E_2 \left[-\frac{E_2}{R_1+R_2-\tau} + \left(\frac{1}{R_1} \left(\frac{E_1(R_2-\tau)}{R_1+R_2-\tau} - E_2 \right) + \frac{E_2}{R_1+R_2-\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

E4a

Per il doppiobipolo di Figura 4a, si calcoli la rappresentazione equivalente alla Thevenin di Figura 4b. Ipotesi: $R_2g + \alpha - 1 \neq 0, g > 0$.



$$\begin{cases} i_1 + gV = (V_1 - V)/R_1 \\ A = (V_1 - V)/R_1 + (V_2 - V)/R_2 \\ V_2 = \alpha V \end{cases} \quad \begin{cases} (g + \frac{1}{R_1})V = \frac{V_1}{R_1} - i_1 \\ V = \frac{V_1 - R_1 i_1}{1 + gR_1} \\ V_2 = \frac{\alpha}{1 + gR_1} (V_1 - R_1 i_1) \end{cases}$$

$$A = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{\alpha R_1} + \frac{V_2}{R_2} - \frac{V_2}{\alpha R_2} = \frac{V_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{\alpha R_2} - \frac{1}{\alpha R_1} \right) \frac{\alpha}{1 + gR_1} (V_1 - R_1 i_1)$$

$$A = V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\alpha}{1 + gR_1} \frac{R_1(\alpha - 1) - R_2}{\alpha R_1 R_2} \right) - \frac{R_1(\alpha - 1) - R_2}{1 + gR_1} \frac{R_1(\alpha - 1) - R_2}{\alpha R_1 R_2} i_1$$

$$A = \frac{(1 + gR_1)R_2 + R_1(\alpha - 1) - R_2}{R_1 R_2 (1 + gR_1)} V_1 - \frac{R_1(\alpha - 1) - R_2}{R_2 (1 + gR_1)} i_1$$

$$A = \frac{R_2 g + \alpha - 1}{R_1 R_2 (1 + gR_1)} V_1 - \frac{R_1(\alpha - 1) - R_2}{R_2 (1 + gR_1)} i_1$$

$$V_1 = \frac{1}{R_2 g + \alpha - 1} \left[(R_1(\alpha - 1) - R_2) i_1 + R_2 (1 + gR_1) A \right]$$

$$V_1 = \underbrace{\frac{R_1(\alpha - 1) - R_2}{R_2 g + \alpha - 1}}_{R_{11}} i_1 + \underbrace{\frac{R_2 (1 + gR_1)}{R_2 g + \alpha - 1}}_{e_1} A \quad R_{12} \equiv \emptyset$$

$$V_2 = \frac{\alpha}{1+gR_1} (V_1 - R_1 i_1) = \frac{\alpha}{1+gR_1} \left[\left(\frac{R_1(\alpha-1) - R_2}{R_2g + \alpha - 1} - R_1 \right) i_1 + \frac{R_2(1+gR_1)A}{R_2g + \alpha - 1} \right]$$

$$V_2 = \frac{\alpha}{1+gR_1} \frac{R_1(\alpha-1) - R_2 - R_1R_2g - R_1(\alpha-1)}{R_2g + \alpha - 1} i_1 + \frac{\alpha R_2}{R_2g + \alpha - 1} A$$

$$V_2 = - \frac{\alpha}{1+gR_1} \frac{R_2(1+gR_1)}{R_2g + \alpha - 1} i_1 + \frac{\alpha R_2}{R_2g + \alpha - 1} A$$

$$V_2 = - \frac{\alpha R_2}{R_2g + \alpha - 1} i_1 + \frac{\alpha R_2}{R_2g + \alpha - 1} A$$

$$R_{22} = 0$$

E45

Per il doppiobipolo di Figura 4a, assumendo $A=0$, discutere l'esistenza delle matrici $[G]$, $[H]$ ed $[H']$ in funzione di α .

• poiché $R_{12} = R_{22} = 0$ $\det(R) = 0 \rightarrow \nexists [G] \forall \alpha$

• $\begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ ed i_1 fissato V_2 non è possibile ricavare univocamente i_2 ! $\rightarrow \nexists [H] \forall \alpha$

• $\begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [H'] \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ $V_1 = R_{11} i_1 \rightarrow i_1 = \frac{1}{R_{11}} V_1$

$$V_2 = R_{21} i_1 = \frac{R_{21}}{R_{11}} V_1$$

$$[H'] = \begin{bmatrix} 1/R_{11} & \emptyset \\ R_{21}/R_{11} & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\exists [H'] \Leftrightarrow R_{11}(\alpha) \neq 0$$

$$R_1(\alpha-1) - R_2 \neq 0 \quad \alpha \neq \frac{R_2+1}{R_1}$$