082742 – Elettrotecnica

Prof. F. Bizzarri

Esame, 23 Settembre 2016

Cognome ______	**Nome** ______
Matricola ______	**Firma** ______

AVVERTENZE

- La prova dura **2.5 ore**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a **16 punti** invalida la prova.

Esercizio	E1a 3 punti	E1b 2 punti	E1c 4.0 punti	E1d 6.0 punti	E2 8.0 punti	E3 5.0 punti		Voto Finale
Voto								

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1a

In $t = 0^-$ nel circuito in Figura 1 il tasto S è aperto. Sapendo che il tripolo è descritto dalle equazioni costitutive

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad (t>0)$$

si determini l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.

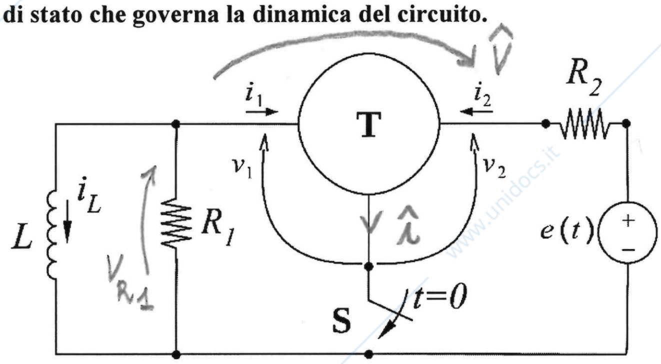


Figura 1

Se S è aperto, $i_1 + i_2 = 0$ dato che $\hat{i} \equiv 0$.

$V_{R1} = V_L = L\frac{di_L}{dt}$ $\qquad i_1 = -i_L - \frac{V_{R1}}{R_1} = -i_L - \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt}$

poichè $V_1 = ri_1 + ri_2 = V_2$, $\hat{v} = 0 \ \forall t$ (dipende solo dalle eq.ni costitutive di T)

$$i_2 = \frac{e(t) - \hat{v} - V_{R1}}{R_2} = \frac{e(t)}{R_2} - \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}$$

$$i_1 = -i_L - \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt} = -i_2 = -\frac{e(t)}{R_2} + \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}$$

$$L\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{di_L}{dt} = -i_L + \frac{e(t)}{R_2}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\left(-i_L + \frac{e(t)}{R_2}\right)$$

$$= -\frac{1}{L}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L + \frac{e(t)R_1}{L(R_1+R_2)}$$

E1b

Per il circuito Figura 1, nelle ipotesi al punto E1a, si assuma $e(t) = E$. Sapendo che in $t = 0^-$ il circuito opera in regime stazionario, si determini $i_L(0^-)$.

in $t = 0^- \rightarrow \frac{di_L}{dt} = \emptyset$

$$0 = \frac{1}{L}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\left(-i_L + \frac{E}{R_2}\right) \rightarrow i_L = \frac{E}{R_2} = i_L(0^-)$$

E1c

Per il circuito Figura 1, nelle ipotesi al punto E1a, in $t = 0^+$ il tasto S si chiude. Si determini l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito per $t > 0$.

Con il tasto chiuso $\hat{i} = i_1 + i_2$ e ancora $\hat{V} = 0$

$$i_1 = -i_L - \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt}$$

$$i_2 = \frac{e(t) - V_2}{R_2} = \frac{e(t) - V_1}{R_2} = \frac{e(t) - V_L}{R_2} = \frac{e(t)}{R_2} - \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}$$

$$V_1 = V_L = r(i_1 + i_2) = r\left(-i_L - \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt} + \frac{e(t)}{R_2} - \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}\right)$$

$$L\left(1 + r\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right)\frac{di_L}{dt} = -r i_L + \frac{r}{R_2}e(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)}\, r\left(-i_L + \frac{e(t)}{R_2}\right)$$

E1d

Per il circuito Figura 1, nelle ipotesi al punto E1c e sempre assumendo $e(t) = E$, si determini $v_2(t)$ per $t > 0$.

$V_2(t) = V_1(t) \quad \forall t$ e $V_1(t) = L \frac{di_L}{dt}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-)$ perché non ci sono relazioni algebriche tra $e(t)$ ed $i_L(t)$ e quindi λ (cioè la frequenza libera del circuito) ha una discontinuità di prima specie).

Si deve dunque risolvere:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2 + r(R_1+R_2)} \, r \left(\frac{E}{R_2} - i_L\right) \\ i_L(0) = \frac{E}{R_2} \end{cases}$$

$i_L(t) = K e^{\lambda t} + \underbrace{h}_{\text{costante}}$ con $\lambda = -\frac{1}{L} \frac{r(R_1+R_2)}{R_1R_2 + r(R_1+R_2)}$

$$h \longrightarrow \frac{dh}{dt} = 0 = \frac{1}{L} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + \tau(R_1 + R_2)} x \left(\frac{E}{R_2} - h \right)$$

$$h = \frac{E}{R_2}$$

$$i_L(t)\Big|_{t=0} = \left(k e^{\lambda t} + \frac{E}{R_2} \right)\Big|_{t=0} = k + \frac{E}{R_2} = \frac{E}{R_2} \Longleftrightarrow k = 0$$

quindi $i_L(t) = \dfrac{E}{R_2}$ ovvero non si osserva il transitorio.

$$V_2(t) = L \frac{di}{dt} = \varnothing$$

E2

Il doppio bipolo lineare affine in Figura 2 evolve in regime sinusoidale permanente alla pulsazione ω e al generatore di tensione $e(t)$ è associato il fasore $\bar{E}$. $\alpha \neq 1$.

1. **Determinarne la rappresentazione mediante la matrice $Y(j\omega)$ e il vettore dei termini noti.**
2. **Si disegni lo schema equivalente in cui si evidenzino il doppio bipolo lineare e i generatori impressivi opportunamente connessi alla porte.**
3. **Discutere l'esistenza di valori non nulli della pulsazione ω per i quali la matrice $Y(j\omega)$ non è definita.**

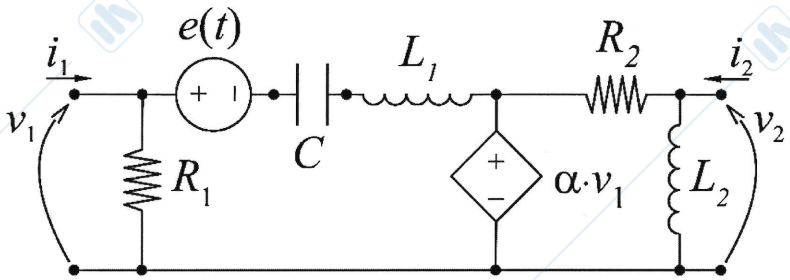


Figura 2

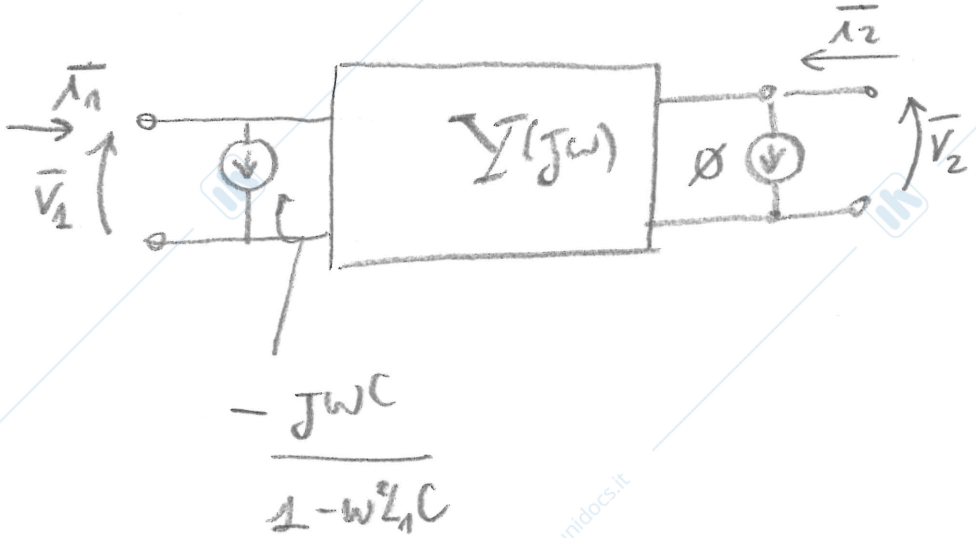
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{j\omega L_2} + \frac{\bar{V}_2 - \alpha\bar{V}_1}{R_2} = -\frac{\alpha}{R_2}\bar{V}_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2}\right)\bar{V}_2$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_1 - \bar{E} - \alpha\bar{V}_1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L_1}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{j\omega C}{1-\omega^2 L_1 C}(1-\alpha)\right)\bar{V}_1 + $$

$$- \frac{j\omega C}{1-\omega^2 L_1 C}\bar{E}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + (1-\alpha)\dfrac{j\omega C}{1-\omega^2 L_1 C} & 0 \\ -\dfrac{\alpha}{R_2} & \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{j\omega C}{1-\omega^2 L_1 C} \\ \emptyset \end{bmatrix}$$



se $\omega = \sqrt{\frac{1}{L_1 C}}$ non esiste la rappresentazione

mediante $\bar{Y}(j\omega)$

E3

Il circuito in Figura 3 evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω e al generatore di tensione e(t) è associato il fasore $\bar{E}$. L'amplificatore operazionale è ideale e funziona in condizione di massa virtuale. Si determini la funzione di rete $H(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{E}}$.

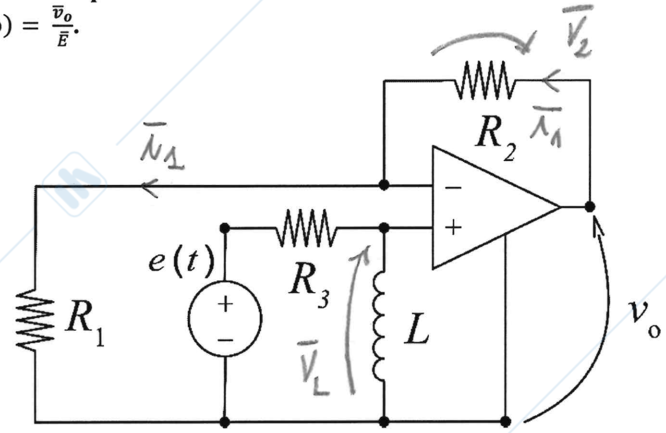


Figura 3

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_L}{R_1} \qquad \bar{V}_2 = R_2 \bar{I}_1 = R_2 \frac{\bar{V}_L}{R_1}$$

$$\bar{V}_o = \bar{V}_2 + \bar{V}_L = \bar{V}_L \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\bar{V}_L = \frac{j\omega L}{R_3 + j\omega L} \bar{E}$$

$$\bar{V}_o = \underbrace{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{j\omega L}{R_3 + j\omega L}}_{H(j\omega)} \bar{E}$$