082742 – Elettrotecnica (E-O)

Prof. F. Bizzarri

Esame, 29 Gennaio 2013

Cognome ______________________	**Nome** ______________________
Matricola ______________________	**Firma** ______________________

AVVERTENZE

- La prova dura **3 ore.**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante. Un punteggio inferiore a 16 invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2 punti	E2a 3 punti	E2b 3 punti	E2c 2 punti	E3 8 punti	E4a 5 punti	E4b 2 punti	E4c 3 punti		Voto Finale
Voto										

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1

Data la situazione in Figura 1, assumendo di essere nel vuoto in un sistema inerziale con Q>0 fissa rispetto all'osservatore, calcolare il lavoro che è necessario compiere per spostare un carica di prova q>0 dal punto A al punto B lungo il percorso γ. [Suggerimento: lasciare il risultato indicato in forma integrale].

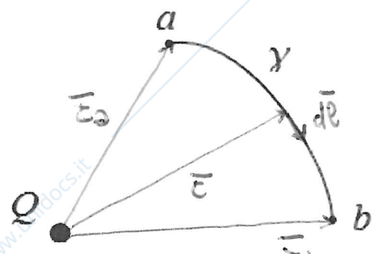
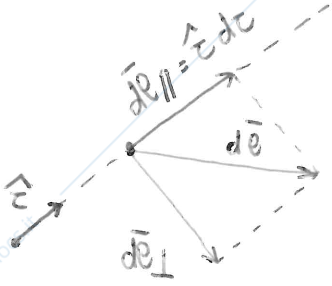


Figura 1

Il campo elettrico $\bar{E}$ generato da Q è $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ ipotizzando un sistema di riferimento cartesiano posto in Q.

Il generico spostamento infinitesimo $d\bar{l}$ lungo γ può essere scomposto in somma di un contributo $d\bar{l}_{//}$ orientato come $\bar{r}$ ed uno $d\bar{l}_\perp$ perpendicolare a $\bar{r}$.

$d\mathcal{L} = -q\bar{E}\cdot d\bar{l} = -q\bar{E}\,(d\bar{l}_{//} + d\bar{l}_\perp) = -q\bar{E}\cdot d\bar{l}_{//}$. Esprimendo $d\bar{l}_{//}$ come $dr\hat{r}$ si ottiene:



$$d\mathcal{L} = -q\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot dr\hat{r} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$\mathcal{L}^{\gamma}_{AB} = \int_A^B d\mathcal{L} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

E2a

Per il circuito in Figura 2, per il quale si assume l'evoluzione in regime sinusoidale, si determinino i fasori $\overline{V}_1$ e $\overline{V}_2$ sapendo che il doppio bipolo DB è descritto dalla matrice di impedenze $\begin{bmatrix} 2R & \frac{1}{j\omega C}+R \\ R & j\omega L \end{bmatrix}$

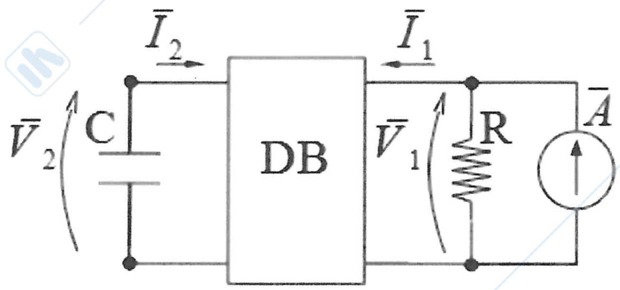


Figura 2

$$\overline{V}_1 = 2R\overline{I}_1 + \left(\frac{1}{j\omega C}+R\right)\overline{I}_2 \qquad \overline{V}_2 = R\overline{I}_1 + j\omega L\,\overline{I}_2$$

$$-\overline{I}_2 = j\omega C\overline{V}_2$$

$$\overline{I}_1 = \overline{A} - \frac{\overline{V}_1}{R}$$

$$\begin{cases} \overline{V}_2 = R\left(\overline{A} - \frac{\overline{V}_1}{R}\right) + j\omega L\left(-j\omega C\right)\overline{V}_2 \\ \overline{V}_1 = 2R\left(\overline{A} - \frac{\overline{V}_1}{R}\right) + \left(\frac{1}{j\omega C}+R\right)\left(-j\omega C\right)\overline{V}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{V}_2 = R\overline{A} - \overline{V}_1 + \omega^2 LC\,\overline{V}_2 \longrightarrow \overline{V}_1 = (\omega^2 LC - 1)\overline{V}_2 + R\overline{A} \\ \overline{V}_1 = 2R\overline{A} - 2\overline{V}_1 - \overline{V}_2 - j\omega RC\overline{V}_2 \longrightarrow 3\overline{V}_1 = 2R\overline{A} - (1+j\omega RC)\overline{V}_2 \end{cases}$$

$$3(\omega^2 LC - 1)\overline{V}_2 + 3R\overline{A} = 2R\overline{A} - (1+j\omega RC)\overline{V}_2$$

$$(3\omega^2 LC - 3 + 1 + j\omega RC)\overline{V}_2 = -R\overline{A} \qquad \overline{V}_2 = -\frac{R\overline{A}}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC}$$

$$\overline{V}_1 = \left(1 - \frac{\omega^2 LC - 1}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC}\right)R\overline{A}$$

E2b

Per il circuito in Figura 2 calcolare (in funzione di L, C, ed R) il valore di ω tale per cui il generatore di corrente eroga solo potenza attiva.

$\frac{1}{2}\bar{V}_1\bar{A}^*$: potenza complessa erogata da $\bar{A}$ $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega^2 LC - 1}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC}\right) R\bar{A}\bar{A}^* =$

$$= \frac{1}{2}R|\bar{A}|^2\left(1 - \frac{\omega^2 LC - 1}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC}\right) = \frac{1}{2}R|\bar{A}|^2 \frac{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC - \omega^2 LC + 1}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC} =$$

$$= \frac{1}{2}R|\bar{A}|^2 \frac{2\omega^2 LC - 1 + j\omega RC}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC} = \frac{1}{2}R|\bar{A}|^2 \frac{(2\omega^2 LC - 1 + j\omega RC)(3\omega^2 LC - 2 - j\omega RC)}{(3\omega^2 LC - 2)^2 + (\omega RC)^2}$$

Se $\mathrm{Imag}\left\{\frac{1}{2}\bar{V}_1\bar{A}^*\right\} = 0$ $\bar{A}$ non eroga potenza reattiva e questo avviene se:

$$(2\omega^2 LC - 1)(-\omega RC) + \omega RC\,(3\omega^2 LC - 2) = 0$$

$$\omega RC\,[3\omega^2 LC - 2 - 2\omega^2 LC + 1] = 0$$

$$(\omega^2 LC - 1) = 0 \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

E2c

Per il circuito in Figura 2, assumendo $\bar{A}$=-jA, calcolare l'andamento nel tempo della tensione v_2(t) corrispondente al fasore $\bar{V}_2$.

$$\bar{V}_2 = -\frac{R\bar{A}}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC} = \frac{jRA}{3\omega^2 LC - 2 + j\omega RC}$$

$$v_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\bar{V}_2 e^{j\omega t}\right\}$$

$$v_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{jRA(3\omega^2 LC - 2 - j\omega RC)}{(3\omega^2 LC - 2)^2 + (\omega RC)^2}(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right\} =$$

$$= \frac{RA}{(3\omega^2 LC - 2)^2 + (\omega RC)^2}\left(\omega RC\cos\omega t + (2 - 3\omega^2 LC)\sin\omega t\right)$$

E3

Il circuito in Figura 3 evolve in regime stazionario immediatamente prima dell'istante t = 0 in cui i due interruttori cambiano posizione e il generatore di tensione presenta una discontinuità. Determinare e rappresentare graficamente $v_{out}(t)$ per $t=0^-$ e t $(0^+,+\infty)$, sapendo che $v_C(-\infty)=0$, il circuito è asintoticamente stabile, $e(t)=E_1$ per $t<0$, $e(t)=E_2>E_1$ per $t>0$.

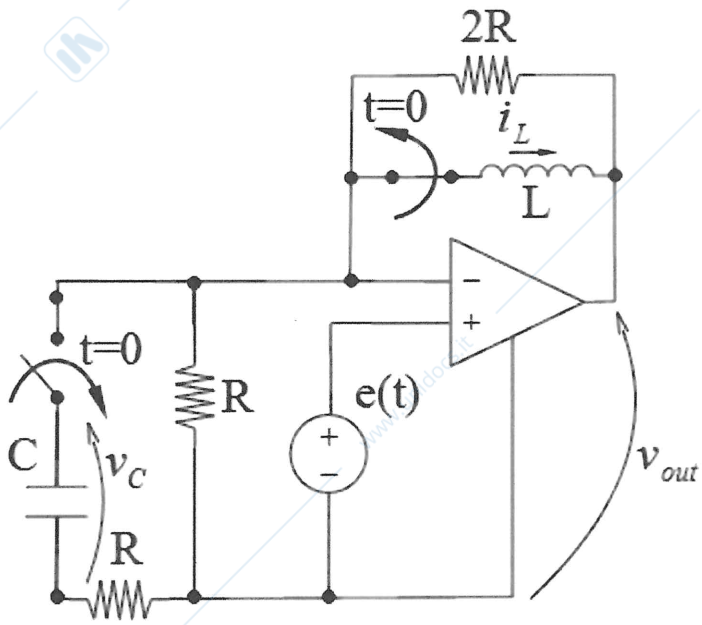
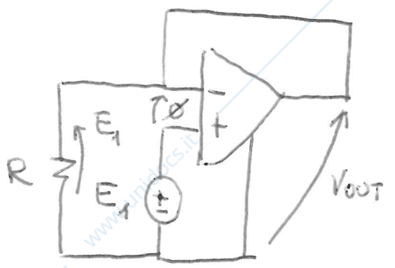


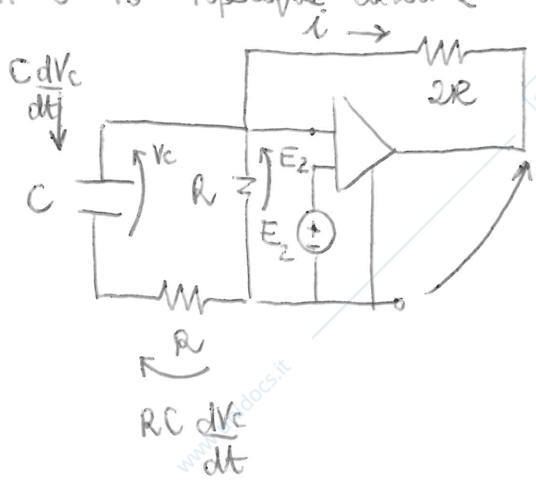
Figura 3

in $t=0^-$ la rete è a regime quindi l'induttore si comporta come un corto circuito il resistore 2R non è attraversato da corrente



$$V_{OUT}\Big|_{t=0^-} = V_R = E_1$$

in 0 la topologia diventa



$$RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = E_2$$

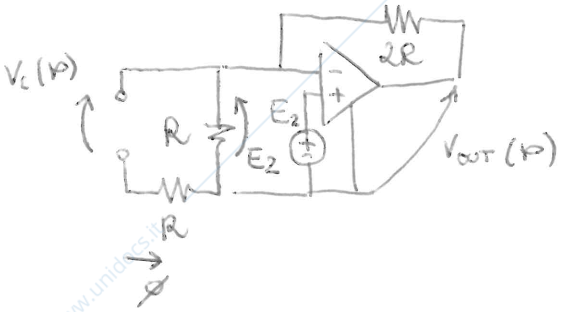
$$\frac{dV_c}{dt} = -\frac{V_c}{RC} + \frac{E_2}{RC}$$

$$V_c(0^-) = 0 = V_c(-\infty)$$

$V_c(0^+) = V_c(0^-)$ perchè v. di stato è più continua degli ingressi.

$$V_c(t)\Big|_{t>0} = V_c(\infty) + \left(V_c(0^+) - V_c(\infty)\right) e^{-\frac{t}{RC}} =$$

$t \to \infty$ dato che la rete è stabile C si comporta come un circuito aperto:



$V_c(\infty) = E_2$

$$V_c(t) = E_2 + (0 - E_2)e^{-\frac{t}{RC}} = E_2\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

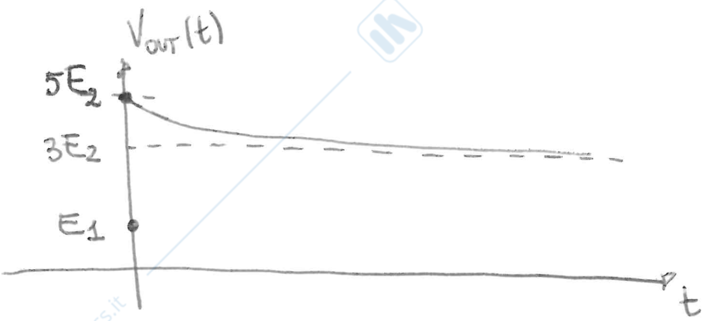
corrente in $2R$

$$i = -C\frac{dV_c}{dt} - \frac{E_2}{R} = -CE_2\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - \frac{E_2}{R} =$$

$$= -E_2C \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{E_2}{R} = -\frac{E_2 e^{-\frac{t}{RC}}}{R} - \frac{E_2}{R}$$

$$V_{OUT}(t) = E_2 - 2Ri = E_2 + 2\cancel{R}\cdot\frac{E_2 e^{-\frac{t}{RC}}}{\cancel{R}} + 2\cancel{R}\frac{E_2}{\cancel{R}} =$$

$$= 2E_2 e^{-\frac{t}{RC}} + 3E_2 = E_2\left(3 + 2e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



E4a

Per il doppiobipolo DB di Figura 4, si calcoli la rappresentazione mediante la matrice [R].

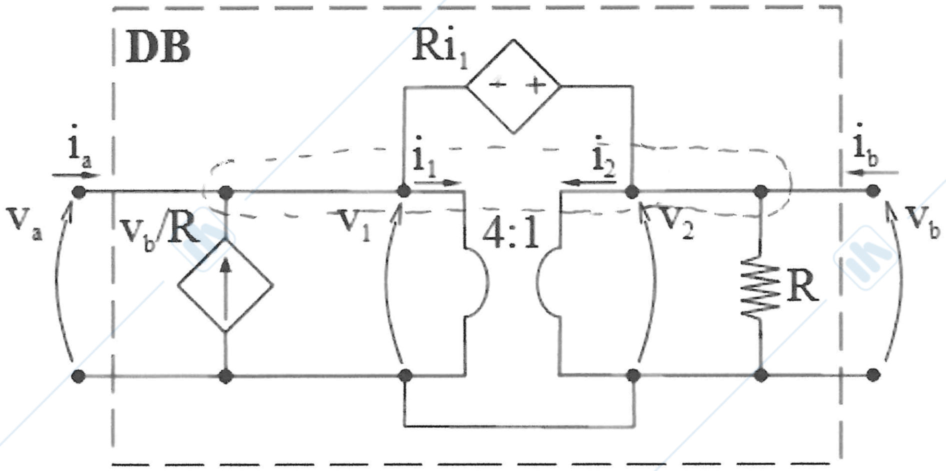


Figura 4

$V_a = V_1$ e $V_B = V_2$ $\qquad V_1 = 4V_2$ e $i_2 = -4i_1$

$$\begin{cases} V_a + Ri_1 - V_b = 0 \\ i_a + \frac{V_b}{R} = -i_b + \frac{V_b}{R} + i_1 + i_2 \\ V_a = 4V_b \\ i_2 = -4i_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_1 = -\frac{3}{R}V_b \\ i_a + \cancel{\frac{V_b}{R}} = -i_b + \cancel{\frac{V_b}{R}} - \frac{3}{R}V_b - 4\left(-\frac{3}{R}V_b\right) \\ V_a = 4V_b \end{cases}$$

$$i_a + i_b = -\frac{3}{R}V_b + \frac{12}{R}V_b = \frac{9}{R}V_b \longrightarrow V_b = \frac{R}{9}(i_a + i_b)$$

$$V_a = 4V_b = \frac{R4}{9}(i_a + i_b)$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

E4b

Si calcolino i parametri del modello equivalente alla Thevenin del bipolo in Figura 5 che si ottiene collegando un generatore di corrente pilotato in corrente alla porta "b" del doppio bipolo DB al punto 4a.

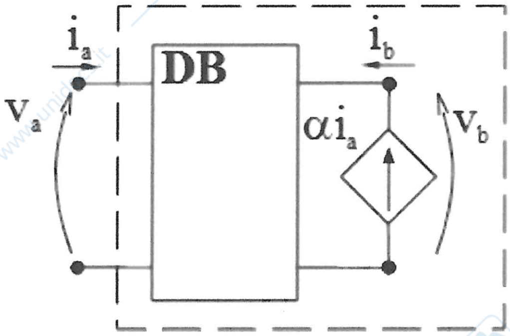


Figura 5

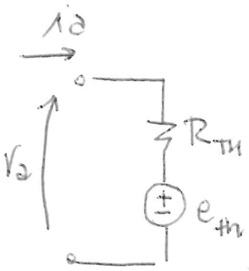
$$V_a = 4/9\, i_a + 4/9\, i_b$$

$$V_b = 1/9\, i_a + 1/9\, i_b$$

$$i_b = \alpha i_a$$

$$V_a = 4/9\, i_a + 4/9 \cdot \alpha\, i_a =$$

$$= 4/9(1+\alpha)\, i_a$$



$$R_{TH} = 4/9\,(1+\alpha)$$

$$e_{th} = \varnothing$$

E4c

Collegando un condensatore di capacità C alla porta "b" del doppio bipolo DB al punto 4a si ottiene il bipolo lineare dinamico in Figura 6 la cui equazione costitutiva è del tipo $i_a = \alpha\frac{dv_a}{dt} + \beta v_a$: calcolare il valore dei parametri α e β.

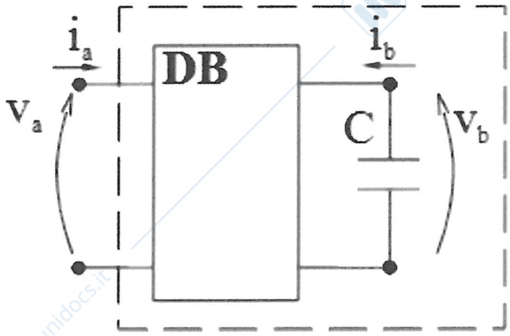


Figura 6

$$v_a = \frac{4}{9} i_a + \frac{4}{9} i_b$$

$$i_b = -C\frac{dV_B}{dt}$$

$$V_b = R\left[\frac{1}{9} i_a + \frac{1}{9} i_b\right] = \frac{V_a}{4}$$

$$i_b = -\frac{C}{4}\frac{dV_a}{dt}$$

$$v_a = R\frac{4}{9} i_a + \frac{4}{9}\left(-\frac{C}{4}\frac{dV_a}{dt}\right)R$$

$$9V_a = 4 i_a R - RC\frac{dV_a}{dt}$$

$$i_a = \frac{9}{4R} V_a + \frac{C}{4}\frac{dV_a}{dt}$$

$$\alpha = \frac{C}{4} \qquad \beta = \frac{9}{4R}$$