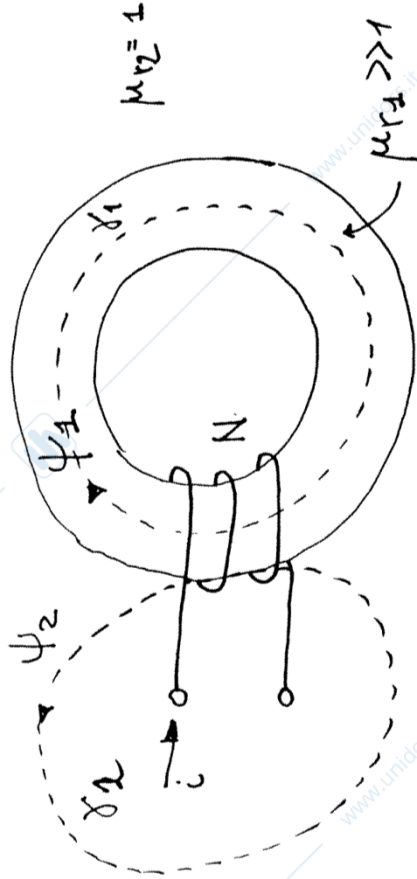


Avvolgimenti su materiale ad alta permeabilità magnetica

In opportune condizioni di lavoro è possibile stimare l'autoinduttanza e la matrice di induttanza di sistemi ottenuti con avvolgimenti su nuclei di materiale ad alta permeabilità magnetica

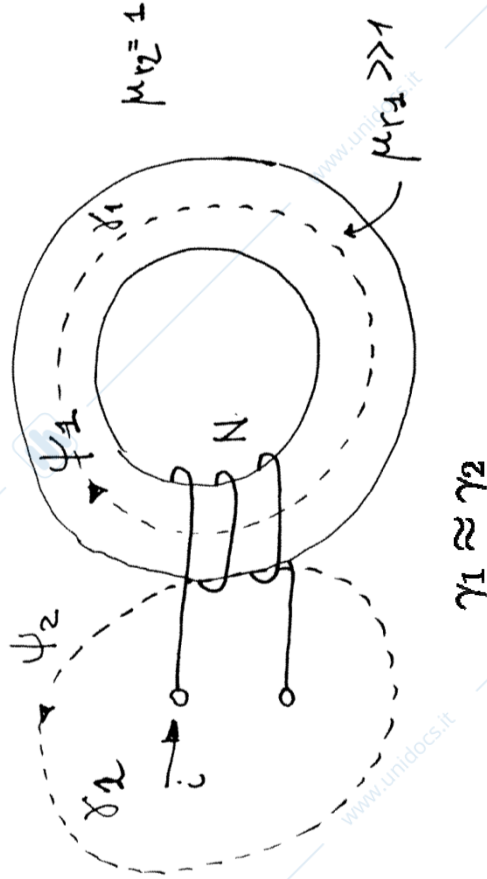


- Il campo B e il campo H sono approssimativamente costanti in tratti uniformi del nucleo (stesso materiale, stessa lunghezza, stessa sezione, ecc.) e del mezzo circostante
- Il materiale del nucleo e del mezzo circostante è lineare (ipotesi abbandonabile ma non senza difficoltà)
- Il campo B e il suo flusso sono trascurabili all'esterno del nucleo

Avvolgimenti su materiale ad alta permeabilità magnetica

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Mezzi lineari



$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

Legge di Ampere

$$\oint_{\gamma_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} \approx H_1 \gamma_1$$

Il campo B e il campo H sono approssimativamente **costanti in tratti uniformi del nucleo e del mezzo circostante**

$$\oint_{\gamma_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} \approx H_2 \gamma_2$$

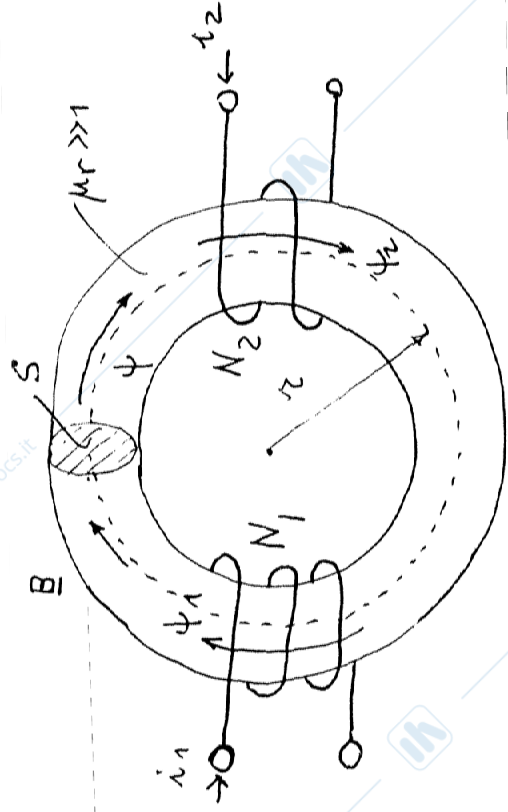
$$H_1 \gamma_1 = NI = H_2 \gamma_2$$

$$H_1 \approx H_2 \quad \text{ma} \quad B_1 \gg B_2$$

Avvolgimenti su materiale ad alta permeabilità magnetica

Indichiamo con ψ_1 e ψ_2 le direzioni dei flussi originati dagli avvolgimenti 1 e 2 quando l'altro avvolgimento è disattivato. Indichiamo invece con ψ il flusso presente nel nucleo. Poiché B è costante nel nucleo e diretto secondo la direzione circonferenziale, e la sezione S del nucleo è costante, si ottiene che anche ψ è costante in tutte le sezioni del nucleo e pari a:

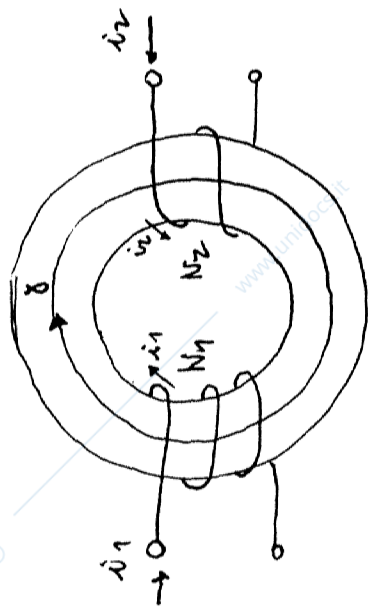
$$\psi = B \cdot S = \mu_r \mu_0 H \cdot S$$



$L = 2\pi r$
lunghezza media del nucleo
 S area del nucleo

Avvolgimenti su materiale ad alta permeabilità magnetica

Si ha poi, dal teorema di Ampère, e tenendo presente che H è costante nel nucleo:

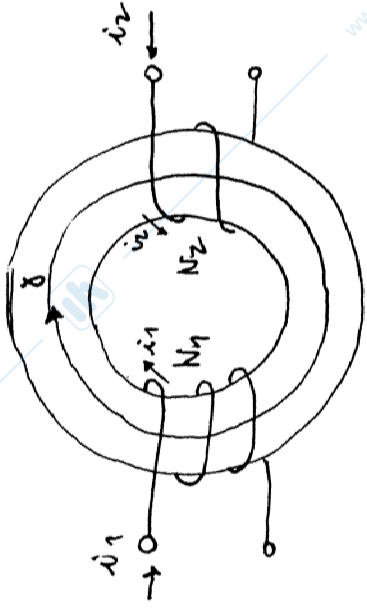


$$\oint \underline{H} \cdot d\underline{\ell} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = H \cdot L$$

(si noti che il verso delle correnti è concorde con la convenzione:



Avvolgimenti su materiale ad alta permeabilità magnetica



Si ha allora:

$$\psi = \frac{\mu_r \mu_0 S}{L} (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$

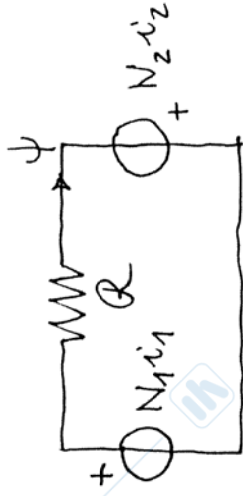
formalmente, introducendo la reluttanza del nucleo:

$$\underline{R = L / \mu_r \mu_0 S}$$

la relazione:

$$\psi = \frac{N_1 i_1}{R} + \frac{N_2 i_2}{R}$$

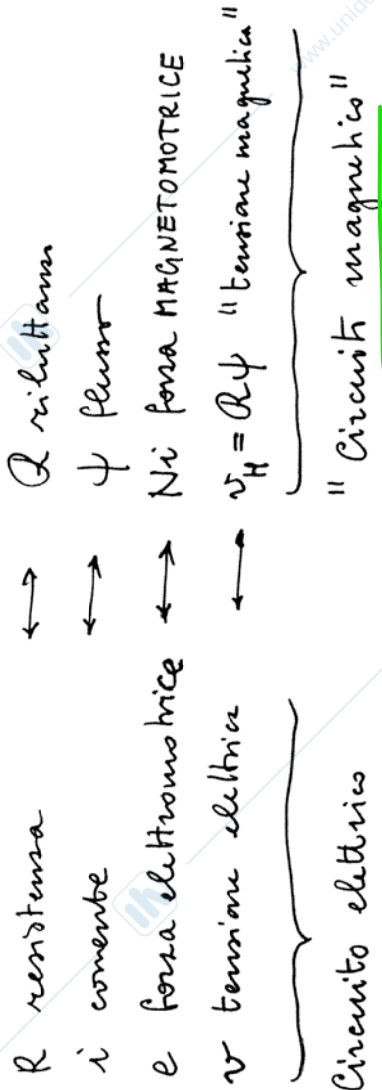
è la soluzione del circuito equivalente elettrico:



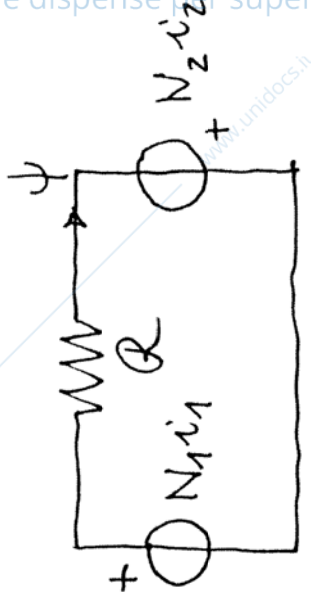
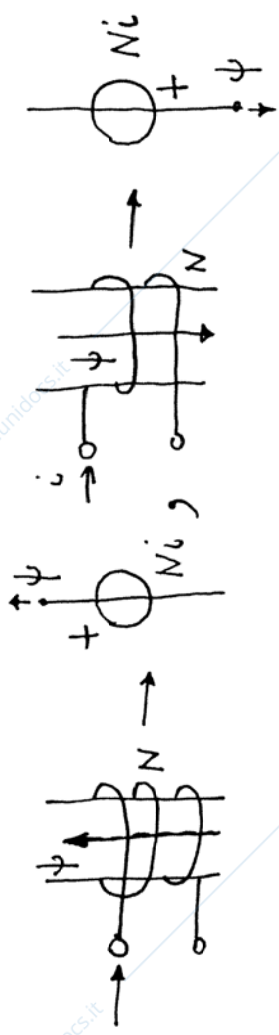
Appunti
prof. Giovanni Ghione al Politecnico di Milano

Avvolgimenti su materiale ad alta permeabilità magnetica

In questo si notano le analogie:



Si noti che vale la convenzione:



Nota: la tensione magnetica e il flusso sono legati da una relazione analoga alla legge di Ohm (inclusi gli orientamenti reciproci)

Avvolgimenti su materiale ad alta permeabilità magnetica

Una volta determinato il flusso ψ nel nucleo i flussi concatenati con i due avvolgimenti sono:

$$\Phi_1 = N_1 \psi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_2 = N_2 \psi = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

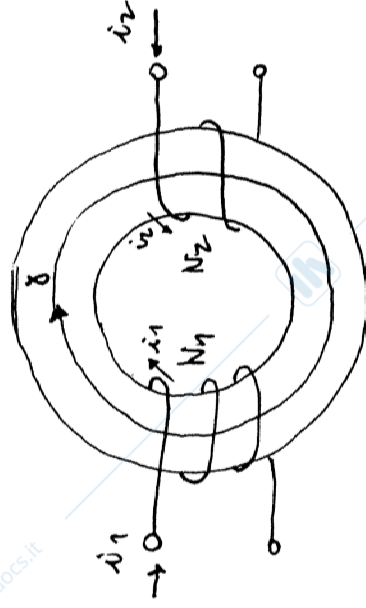
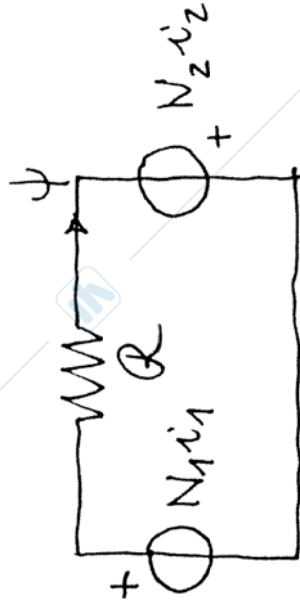
da cui, per definizione, la matrice induttanza:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

riluttanza e induttanza sono inversamente proporzionali



Circuiti magnetici

Si dice circuito magnetico una connessione o rete composta da lati formati da:

- 1) elementi magneticamente passivi, formati da tratti di lunghezza L_i e sezione S_i (permeabilità relativa μ_{ri}) i quali hanno un circuito equivalente elettrico formato da una riluttanza

$$R_i = L_i / \mu_{ri} \mu_0 S_i$$

- 2) elementi magneticamente attivi, formati da tratti di lunghezza L_k sezione S_k , permeabilità relativa μ_{rk} su cui è presente un avvolgimento di N_k spire percorso dalla corrente i_k : il circuito equivalente elettrico è composto da una riluttanza

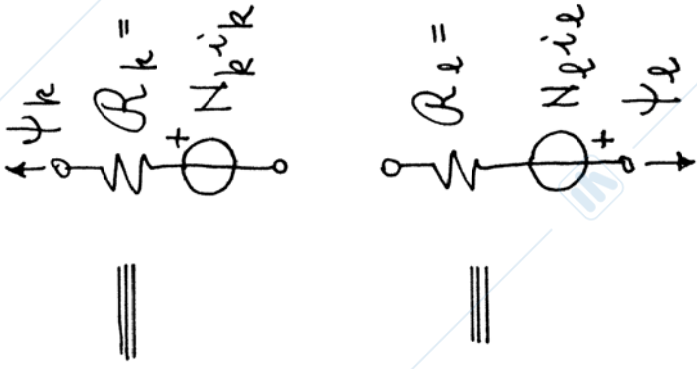
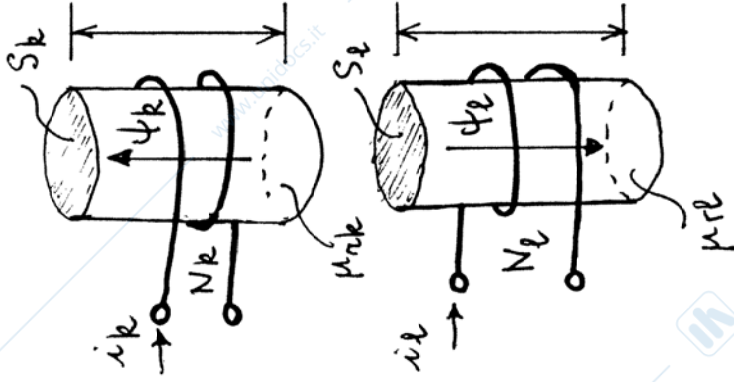
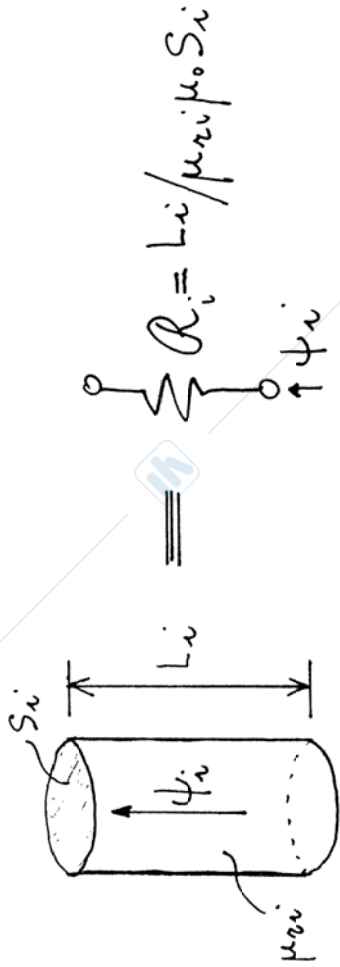
$$R_k = L_k / \mu_{rk} \mu_0 S_k$$

in serie ad una forza magnetomotrice:

$$e_k = \pm N_k i_k$$

Circuiti magnetici

Si hanno quindi i modelli circuitali:



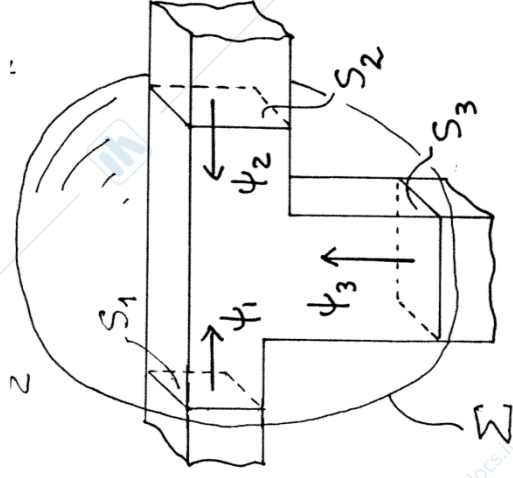
Circuiti magnetici

I punti di connessione dei lati del circuito magnetico sono i modi del circuito magnetico; poiché (Legge di Gauss magnetica):

$$\oint_{\Sigma} \underline{B} \cdot \hat{n} \, \sigma = \phi$$

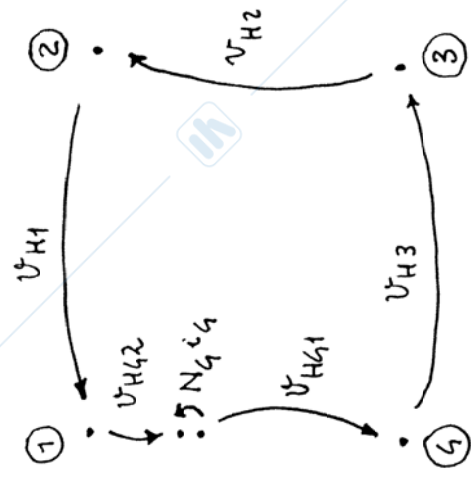
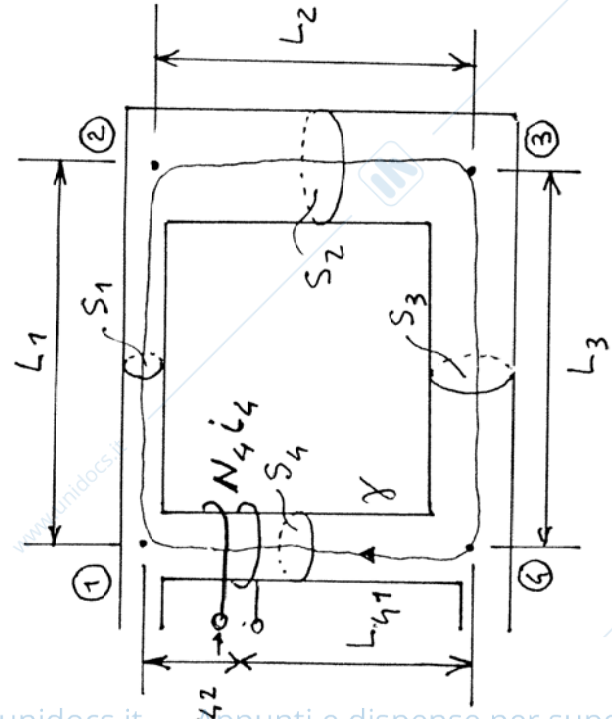
si ha, per densità di flusso costante e nulle fuori dalle sezioni del circuito magnetico:

$$\oint_{\Sigma} \underline{B} \cdot \hat{n} \, d\sigma \approx \sum_k B_k S_k = \sum_k \psi_k = \phi$$



KCL Magnetica:
la somma dei flussi entranti in un nodo è nulla:
$$\sum_k \psi_k = 0$$

Circuiti magnetici



ad esempio:

$$\oint_{\gamma} \underline{H} \cdot d\underline{\ell} = N_4 i_4$$

da:

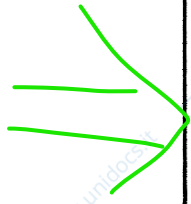
$$v_{H1} + v_{H2} + v_{H3} + v_{H4} + v_{H42} = N_4 i_4$$

ovvia:

$$H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3 + H_4 L_4 + H_4 L_4 = N_4 i_4$$

KVL Magnetica:

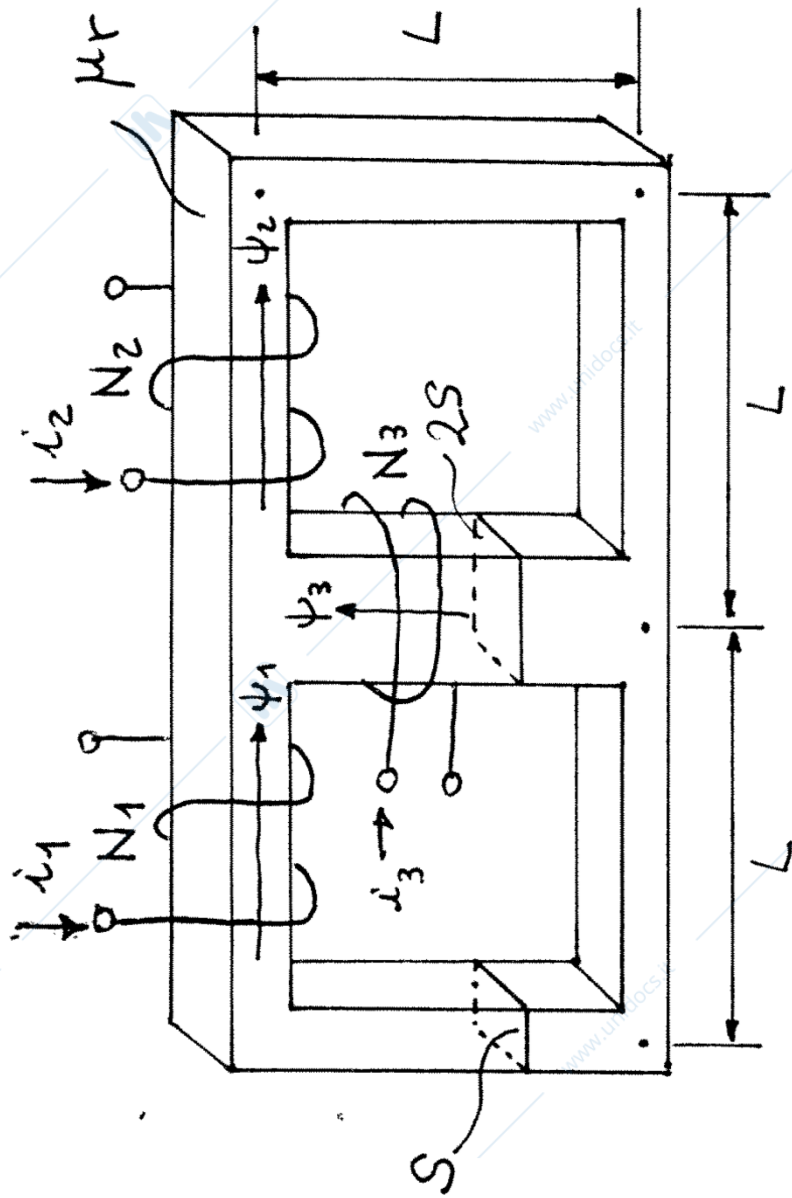
La somma delle cadute di tensione magnetica su di un percorso chiuso è pari alla somma delle forze magnetomotrici presenti nel percorso (preseate con segno opportuno)



Circuiti magnetici

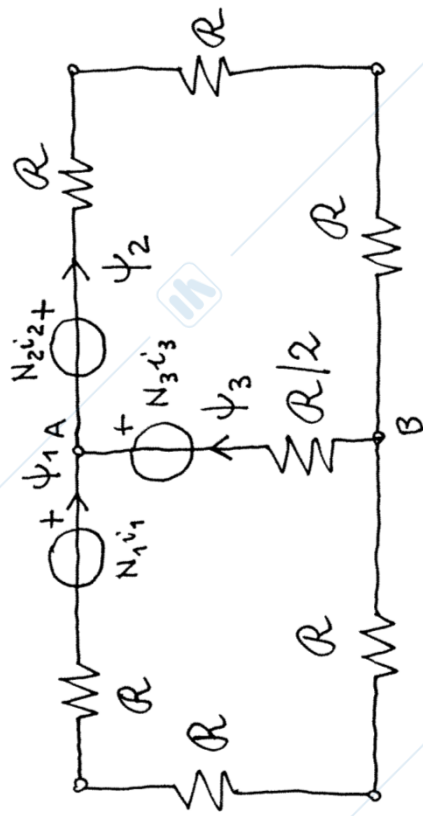
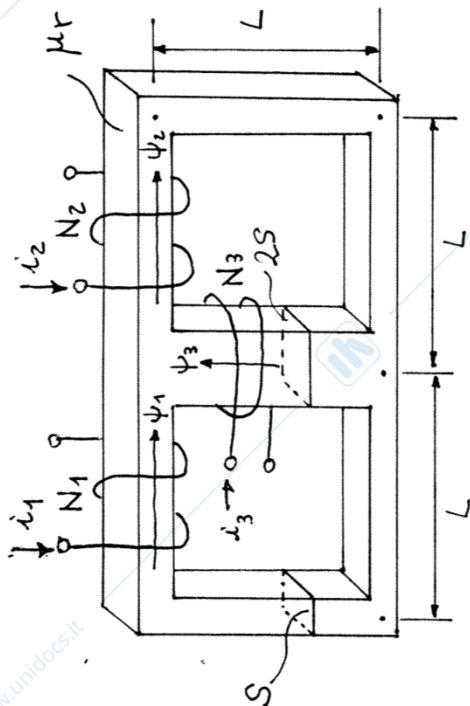
In conclusione un circuito magnetico soddisfa a tutte le leggi (topologiche, KCL + KVL; relazioni costitutive) di un circuito elettrico, ed è quindi completamente sostituito dal relativo circuito equivalente elettrico.

Esempio

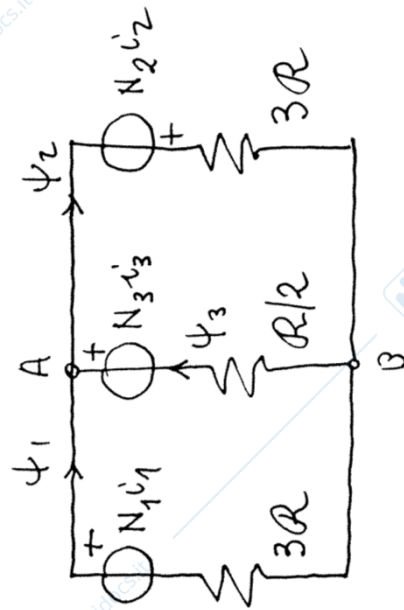


$$R = \frac{L}{\mu_r \mu_0 S}$$
$$R_1 = \frac{L}{\mu_r \mu_0 2S} = \frac{R}{2}$$

Esempio



$$\begin{aligned} \psi_{AB} &= N_1 i_1 - 3R \psi_1 \\ &= N_3 i_3 - \frac{R}{2} \psi_3 \\ &= -N_2 i_2 + 3R \psi_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \psi_{AB} &= \frac{N_1 i_1 + \frac{-N_2 i_2}{3R} + \frac{2N_3 i_3}{R}}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} + \frac{2}{R}} \\ &= \frac{1}{8} (N_1 i_1 - N_2 i_2 + 6N_3 i_3) \end{aligned}$$

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del
prof. Giovanni Ghione al Politecnico di Milano

Esempio

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{3R} (N_1 \dot{v}_1 - v_{AB}) = \frac{1}{3R} \left[N_1 \dot{v}_1 \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} N_2 \dot{v}_2 - \frac{6}{8} N_3 \dot{v}_3 \right] = \\ &= \frac{1}{24R} [7 N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{v}_2 - 6 N_3 \dot{v}_3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \frac{1}{3R} (v_{AB} + N_2 \dot{v}_2) = \frac{1}{3R} \left[\frac{1}{8} N_1 \dot{v}_1 - \left(-1 + \frac{1}{8}\right) N_2 \dot{v}_2 + \frac{6}{8} N_3 \dot{v}_3 \right] = \\ &= \frac{1}{24R} [N_1 \dot{v}_1 + 7 N_2 \dot{v}_2 + 6 N_3 \dot{v}_3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \frac{2}{R} (N_3 \dot{v}_3 - v_{AB}) = \frac{2}{R} \left[N_3 \dot{v}_3 - \frac{1}{8} N_1 \dot{v}_1 + \frac{1}{8} N_2 \dot{v}_2 - \frac{6}{8} N_3 \dot{v}_3 \right] = \\ &= \frac{1}{4R} [-N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{v}_2 + 2 N_3 \dot{v}_3]\end{aligned}$$

Esempio

$$\phi_1 = N_1 \psi_1 \quad \phi_2 = N_2 \psi_2 \quad \phi_3 = N_3 \psi_3$$

$$\phi_1 = \frac{7}{24R} N_1^2 \dot{i}_1 + \frac{1}{24R} N_1 N_2 \dot{i}_2 - \frac{6}{24R} N_1 N_3 \dot{i}_3$$

$$\phi_2 = \frac{1}{24R} N_2 N_1 \dot{i}_1 + \frac{7}{24R} N_2^2 \dot{i}_2 + \frac{6}{24R} N_2 N_3 \dot{i}_3$$

$$\phi_3 = \frac{-1}{4R} N_1 N_3 \dot{i}_1 + \frac{1}{4R} N_2 N_3 \dot{i}_2 + \frac{2}{4R} N_3^2 \dot{i}_3$$

Esempio

$$\underline{L} = \frac{1}{24R} \begin{pmatrix} 7N_1^2 & N_1N_2 & -6N_1N_3 \\ N_1N_2 & 7N_2^2 & 6N_2N_3 \\ -6N_1N_3 & 6N_2N_3 & 12N_3^2 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che:

$$\det \underline{L} = 0$$

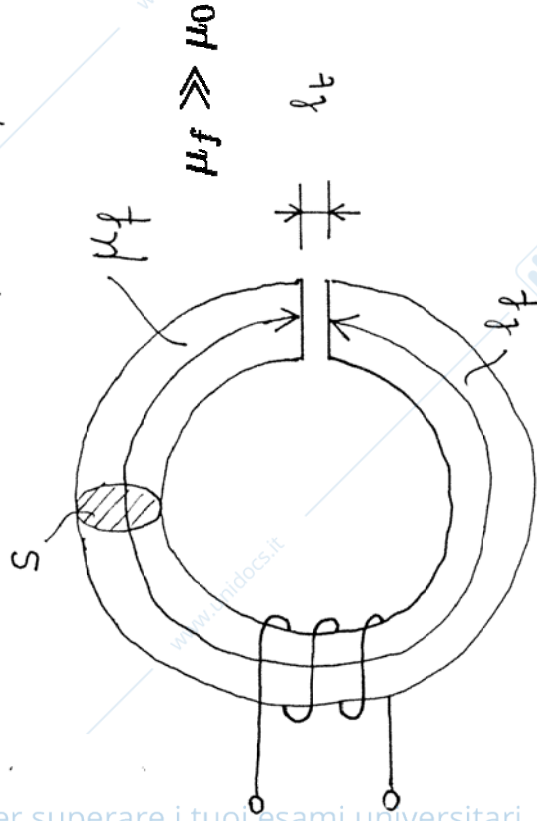
ovvia ci si trova in una situazione di accoppiamento perfetto (tutto il flusso concatenato con ciascuno degli avvolgimenti è anche concatenato con gli altri due).

Traferro

Tipicamente i materiali che costituiscono il nucleo non sono lineari e questo crea problemi ad esempio in ambito elettronico con la generazione di distorsioni.

Una soluzione è costituita dal **traferro** (o **intraferro**), ovvero un'interruzione in aria del nucleo per un tratto molto breve di lunghezza molto minore dell'ampiezza del nucleo (ciò permette di considerare continuo il flusso attraverso il traferro).

$$R = \frac{l_f}{\mu_f S} + \frac{l_t}{\mu_0 S} = R_f + R_t$$



La riluttanza del nucleo, seppur non lineare, viene trascurata perché la permeabilità del nucleo è molto minore di quella dell'aria (che è circa quella del vuoto).

Agendo sullo spessore del traferro è possibile ottenere bassi valori di riluttanza e quindi alti valori di induttanza

$$R \approx R_t = \frac{l_t}{\mu_0 S}$$