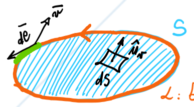
giovedì 11 aprile 2019 15:00

Nota sul calcolo della derivata del flusso di un campo vettoriale $\bar{A}$ attraverso una superficie

$\bar{A}$ tempo variante e la superficie S la si pensa composta da tratti elementari $d\bar{\ell}$, ciascuno in moto con velocità $\bar{v}$. Complessivamente, quindi, il flusso di $\bar{A}$ attraverso S varia nel tempo perché varia $\bar{A}$ e perché S si muove (o si deforma).



$\mathcal{L}$: bordo di S da percorrere secondo la "regola della mano destra"

$\hat{u}_N$ L

$$\frac{d}{dt}\Phi_S(\bar{A}) = \frac{d}{dt}\int_S \bar{A}\cdot\hat{u}_N\, dS =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial}{\partial t}\bar{A} - \bar{\nabla}\times(\bar{v}\times\bar{A}) + \bar{v}\,\bar{\nabla}\cdot\bar{A}\right)\hat{u}_N\, dS$$

$\bar{\nabla}$ è l'operatore differenziale "NABLA"

$\bar{\nabla}\cdot\bar{A}$ è la di DIVERGENZA di $\bar{A}$

$\bar{\nabla}\times(\bar{v}\times\bar{A})$ è il ROTORE di $\bar{v}\times\bar{A}$

Utilizzando il Teorema di Stokes

$$\int_S \bar{\nabla}\times(\bar{v}\times\bar{A})\hat{u}_N dS \equiv \oint_L (\bar{v}\times\bar{A})\cdot d\bar{\ell}$$

$$\frac{d}{dt}\int_S \bar{A}\cdot\hat{u}_N\, dS = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial t}\bar{A} + \bar{v}\,\bar{\nabla}\cdot\bar{A}\right)\hat{u}_N\, dS - \oint_L (\bar{v}\times\bar{A})\cdot d\bar{\ell}$$

Prendiamo ora la terza eq^{ne} di Maxwell

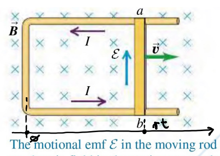
$$-\oint_L \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = \frac{d}{dt}\int_S \bar{B}\cdot\hat{u}_N\, dS$$

Ricordando che $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$ (È il teorema di Gauss x campo $\bar{B}$ in forma locale)

$$-\oint_L \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(t)\cdot\hat{u}_N\, dS - \oint_L (\bar{v}\times\bar{B})\cdot d\bar{\ell}$$

Questa formulazione consente di utilizzare egualmente la terza eq^{ne} di Maxwell per studiare problemi di induzione elettromagnetica dovuti da $\bar{B}$ tempo-variante e/o S che varia nel tempo.

Esempio:



The motional emf $\mathcal{E}$ in the moving rod creates an electric field in the stationary conductor.

$\otimes\,\bar{B}$ (costante e uniforme) $= B\hat{u}_B$

$\otimes\,\hat{u}_N \Longrightarrow$ L (percorriamo L in senso orario)

$\otimes\,\hat{u}_B$

$S = vt\,\ell_{ab}$

$$-\oint \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = \underbrace{\int_S \frac{\partial}{\partial t}\bar{B}\cdot\hat{u}_N\, dS}_{\emptyset \text{ } \bar{B} \text{ è costante}} - \oint_L (\bar{v}\times\bar{B})\, d\bar{\ell} =$$

$$= -\oint_L (\bar{v}\times\bar{B})\, d\bar{\ell} \overset{(*)}{=} vB\ell_{ab}$$

(*) Si noti che $(\bar{v}\times\bar{B})\cdot d\bar{\ell} < 0$ dato il verso di percorrenza di L

$-\oint \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = vB\ell_{AB}$ ed è una tensione che sostiene una corrente che fluisce in senso antiorario, così producendo, in accordo con la legge di Lenz, un campo $\tilde{B}_{indotto}$ che si oppone alla variazione del $\Phi_S(\bar{B})$.

Se nell'esempio avessimo invece anche $\bar{B} = B_0 \operatorname{sen}\omega t\, \hat{u}_B$ si avrebbe:

$$-\oint \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}(B_0 \operatorname{sen}\omega t)\hat{u}_B\cdot\hat{u}_N\, dS - \oint_L (\bar{v}\times\bar{B})\cdot d\bar{\ell}$$

$$= \underbrace{vt\ell_{ab}}_{S(t)}\, \omega B_0 \cos\omega t - vB_0 \operatorname{sen}\omega t\, \ell_{ab}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari