POLITECNICO MILANO

082742 – Elettrotecnica (E-O) . ESAME, 14 Luglio 2014

Prof. F. Bizzarri

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Firma** ______________________

AVVERTENZE

- La prova dura **3 ore e mezza**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a **16 punti** invalida la prova.

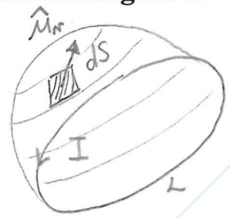
Quesito o Esercizio	E1 2.0 punti	E2a 4.0 punti	E2b 3.0 punti	E2c 2.0 punto	E3a 8.0 punti	E3b 1.0 punto	E4a 3.0 punti	E4b 5.0 punti
Voto								

Voto Finale

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1a

Motivare l'equazione costitutiva dell'induttore lineare a partire dal principio dell'induzione elettromagnetica.



SPIRA PERCORSA DA CORRENTE I. Per la legge di Ampere - Laplace, I produce nello spazio un campo $\bar{B}$ che in ogni punto è proporzionale ad I. Quindi il flusso di $\bar{B}$ concatenato con la spira è proporzionale ad I attraverso un coeff. che si chiama (auto)induttanza

$$\int_S \bar{B}\cdot\hat{u}_n\, dS = I \underbrace{\left[\int_S \left(\frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\oint_L \frac{\hat{u}_T\times\hat{u}_r\, dl}{r^2}\right)\cdot\hat{u}_n\, dS\right]}_{\text{dipende dal materiale e dalla forma della spira.}} = IL$$

Se $I = I(t)$, per la legge di Faraday-Henry: $\text{f.e.m.} = -\frac{d}{dt}\overbrace{IL}^{\Phi_m} = -L\overset{(*)}{\frac{d}{dt}}I = V_m$

V_m agisce generando una corrente che a sua volta genera un $\bar{B}_{ind}$ che si oppone alle variazioni di Φ_m. Presa $V = -V_m$ (x utilizzare la convenz. normale)

$$\boxed{V = L\frac{dI}{dt}}$$

(*) Assumiamo x semplicità geometria rigida della spira

E2a

Per il circuito in Figura 1 si ricavi l'equazione di stato che ne governa la dinamica e l'intervallo di valori del parametro g che garantisce l'assoluta stabilità. Si assuma $\alpha > 0$.

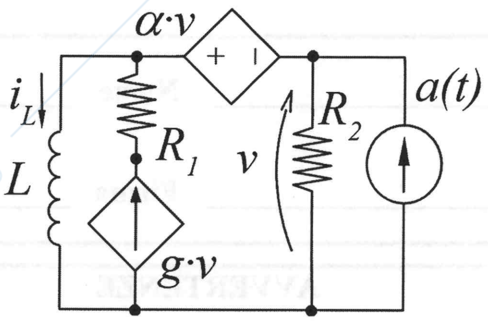


Figura 1

i_L è la variabile candidata ad essere variabile di stato. Dato che non ci sono relazioni algebriche tra $a(t)$ ed i_L, quest'ultima è la variabile di stato del circuito.

$$L\frac{di_L}{dt} = \alpha v + v = (\alpha+1)v \longrightarrow v = \frac{L}{\alpha+1}\frac{di_L}{dt}$$

$$i_L + \frac{v}{R_2} = gv + a(t)$$

$$\left(\frac{1}{R_2} - g\right)\frac{L}{\alpha+1}\frac{di_L}{dt} = -i_L + a(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_2(\alpha+1)}{(R_2 g - 1)L}\left(i_L - a(t)\right)$$

$$\lambda = \frac{R_2(\alpha+1)}{(R_2 g - 1)L} \qquad \lambda < 0 \iff R_2 g < 1$$

$$g < \frac{1}{R_2}$$

E2b

Per il circuito in Figura 1 si assuma $a(t) = A_1 + A_2\, u(t-2)$ (con A_1 e A_2 positivi) e, per $t = 2^-$, il circuito a regime. Si determini $i_L(2^-)$ e $i_L(t)$ per $t \in (2^+, +\infty)$.

La risposta forzata ad un generico ingresso costante A_0, data l'equazione di stato ricavata al punto precedente, è pari ad una costante H che soddisfi:

$$\frac{d}{dt} H = 0 = \lambda (H - A_0)$$

ovvero $H = A_0$. Per $t = 2^-$ il circuito è a regime e quindi $i_L(2^-) = A_1$.

$a(t)$ è discontinua ma limitata tra 2^- e 2^+ e, essendo $i_L(t)$ variabile di stato, $i_L(2^-) = i_L(2^+) = A_1$

Per $t > 2$, $i_L(t) = k e^{\lambda(t-2)} + A_1 + A_2$. Si noti infatti che per $t > 2$ $a(t) = A_1 + A_2$.

$$i_L(2) = A_1 = k + A_1 + A_2 \longrightarrow k = -A_2$$

$$i_L(t)\Big|_{t>2} = A_2\left(1 - e^{\lambda(t-2)}\right) + A_1$$

E2c

Per il circuito in Figura 1, nelle stesse ipotesi del punto precedente, si determini $v(2^-)$ e $v(t)$ per $t \in (2^+, +\infty)$.

$v(t)$ non è variabile di stato e quindi, con $a(t)$ discontinua tra 2^- e 2^+, potrà presentare discontinuità.

In $t = 2^-$ il circuito è a regime stazionario e quindi $V_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$ e quindi $V = \frac{L}{\alpha+1} \frac{di_L}{dt} = 0$.

per $t > 2$, e quindi anche in 2^+,

$$V(t) = \frac{L}{\alpha+1} \frac{d}{dt} \left(A_2 \left(1 - e^{\lambda(t-2)}\right) + A_1 \right) =$$

$$= \frac{\cancel{L}}{\cancel{\alpha+1}} A_2 \left(- \frac{R_2 \cancel{(\alpha+1)}}{(R_2 g - 1)\cancel{L}} \right) e^{\lambda(t-2)} = \frac{A_2 R_2}{1 - R_2 g} e^{\lambda(t-2)}$$

in particolare $V(2^+) = \frac{A_2 R_2}{1 - R_2 g} \neq V_2(0^-)$

E3a

Il circuito in Figura 2 evolve in <u>regime periodico</u> con $e(t) = E\cos(2\omega t)$ e $a(t) = A\sin(\omega t)$. Si determini $v_1(t)$.

$V_1 = nV_2$

$i_1 = -\frac{1}{n} i_2$

$i_2 = -n i_1.$

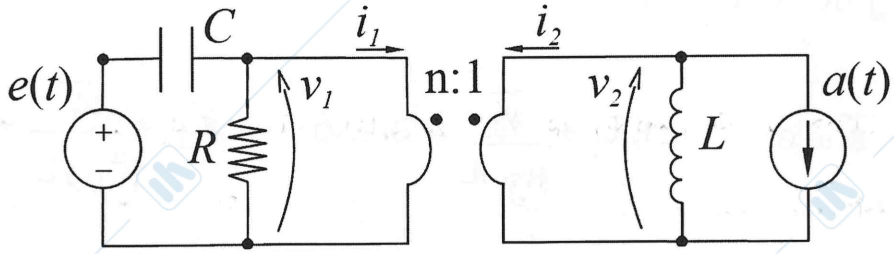


Figura 2

• pulsazione 2ω → $a(t)$ passivato $\bar{e} = E$

$$\bar{i}_2 = -\frac{1}{j2\omega L}\bar{V}_2 \qquad \bar{i}_1 = -\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{j2\omega L}\bar{V}_2\right) = -\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{j2\omega L}\frac{\bar{V}_1}{n}\right) = \frac{1}{jn^2 2\omega L}\bar{V}_1$$

$$(E-\bar{V}_1)\, j2\omega C = \frac{\bar{V}_1}{R} + \bar{i}_1 = \frac{\bar{V}_1}{R} + \frac{1}{jn^2 2\omega L}\bar{V}_1$$

$$\bar{V}_1\left(j2\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{jn^2 2\omega L}\right) = E\, j2\omega C \qquad \bar{V}_1 \frac{jn^2 2\omega L + R - 4n^2\omega^2 LCR}{jn^2 2\omega L R} = E\, j2\omega C$$

$$\bar{V}_1 = \frac{-4n^2\omega^2 LRCE}{R-4n^2\omega^2 LRC + jn^2 2\omega L} = \frac{-4n^2\omega^2 LRCE}{(R-4n^2\omega^2 LRC)^2 + n^4 4\omega^2 L^2}\left(R-4n^2\omega^2 LRC - jn^2 2\omega L\right)$$

$$v_1(t)\Big|_{a(t)=0} = \mathrm{Re}\{\bar{V}_1 e^{j2\omega t}\}$$

$$v_1(t) = \frac{-4n^2\omega^2 LRCE}{(R-4n^2\omega^2 LRC)^2 + n^4 4\omega^2 L^2}\left((R-4n^2\omega^2 LRC)\cos 2\omega t + n^2 2\omega L \sin 2\omega t\right)$$

con $e(t) = 0 \longrightarrow \bar{a} = -JA$

$$\bar{V}_1 \left(\frac{1}{R} + J\omega C \right) + \bar{i}_1 = 0$$

$$\bar{i}_2 + \frac{\bar{V}_2}{J\omega L} + \bar{a} = 0 \qquad -n\bar{i}_1 + \frac{\bar{V}_1}{nJ\omega L} + \bar{a} = 0 \qquad \bar{i}_1 = \frac{\bar{V}_1}{n^2 J\omega L} + \frac{\bar{a}}{n}$$

$$\bar{V}_1 \left(\frac{1}{R} + J\omega C + \frac{1}{n^2 J\omega L} \right) = -\frac{\bar{a}}{n} = \frac{JA}{n}$$

$$\bar{V}_1 = \frac{JA}{\cancel{n}} \frac{J R n^{\cancel{2}} \omega L}{R - n^2\omega^2 LCR + Jn^2\omega L} = -\frac{ARn\omega L}{R - n^2\omega^2 LRC + Jn^2\omega L} =$$

$$= -\frac{ARn\omega L}{(R - n^2\omega^2 LRC)^2 + n^4\omega^2 L^2} \left(R - n^2\omega^2 LCR - Jn^2\omega L \right)$$

$$V_1(t)\Big|_{a(t)=0} = Re\left\{ \bar{V}_1 e^{J\omega t} \right\} = -\frac{ARn\omega L}{(R - n^2\omega^2 LRC)^2 + n^4\omega^2 L^2} \Big((R - n^2\omega^2 LRC)\cos\omega t + n^2\omega L \operatorname{sen}\omega t \Big)$$

E3b

Assumendo E = 0, determinare la potenza complessa assorbita dal trasferitore ideale di potenza (giustificare la risposta).

Il componente è per definizione inerte e quindi non assorbe potenza in nessuna condizione di funzionamento. Quindi $\hat{P}_a^{t.i} = \emptyset$.

E4a

Il circuito a ponte in Figura 3 evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω. Il voltmetro ideale misura ai suoi capi una tensione nulla ovvero il ponte si dice bilanciato. Verificare che, in queste ipotesi, $Z_1(j\omega)Z_4(j\omega) = Z_2(j\omega)Z_3(j\omega)$.

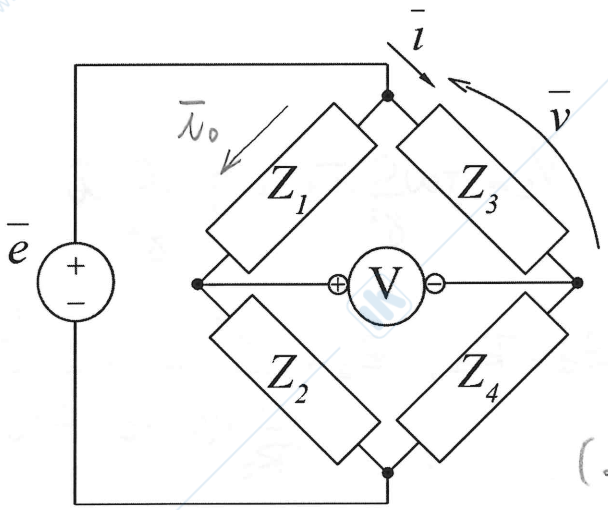


Figura 3

$$\bar{e} = Z_3\bar{i} + Z_4\bar{i}$$

$$\bar{e} = Z_1\bar{i}_0 + Z_2\bar{i}_0$$

da cui

$$(Z_3+Z_4)\bar{i} = (Z_1+Z_2)\bar{i}_0$$

Se il voltmetro misura $\emptyset$ Volt, ottengo

$\bar{i}_0 Z_2 = \bar{i} Z_4$ cioè $\bar{i}_0 = \dfrac{Z_4\bar{i}}{Z_2}$

$$(Z_3+Z_4)\cancel{\bar{i}} = (Z_1+Z_2)\frac{Z_4}{Z_2}\cancel{\bar{i}}$$

$$Z_2Z_3 + \cancel{Z_4Z_2} = Z_1Z_4 + \cancel{Z_2Z_4}$$

$$Z_2Z_3 = Z_1Z_4$$

E46

Con riferimento al circuito in Figura 3, siano $Z_1(j\omega) = R_1$, $Z_2(j\omega) = R_2||(1/j\omega C_2)$, $Z_4(j\omega) = R_4$. Siano fissati R_1 ed R_2 mentre C_2 ed R_4 siano parametri variabili che è possibile regolare per bilanciare il ponte. Utilizzare il circuito di misura per determinare il valore della capacità C e della resistenza R del circuito in Figura 4 in cui il doppio bipolo è descritto mediante matrice G e il parametro γ è noto.

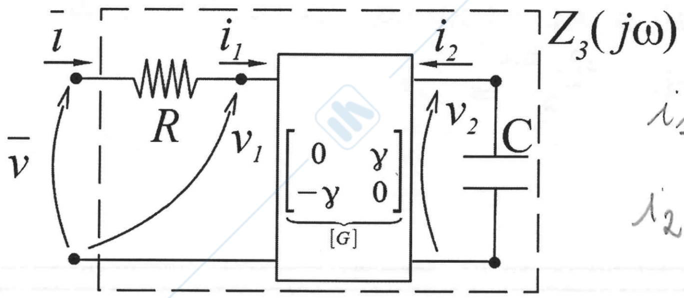


Figura 4

$$i_1 = \gamma V_2$$

$$i_2 = -\gamma V_1$$

$$-\dot{V}_2 = C\frac{dV_2}{dt} = \frac{C}{\gamma}\frac{di_1}{dt}$$

$$V_1 = -\frac{i_2}{\gamma} = \frac{C}{\gamma^2}\frac{di_1}{dt} \longrightarrow \bar{V}_1 = j\omega\frac{C}{\gamma^2}\bar{i}_1 = j\omega\frac{C}{\gamma^2}\bar{i}$$

$$\bar{V} = \overbrace{\left(R + j\omega\frac{C}{\gamma^2}\right)}^{Z_3}\bar{i}$$

Se $Z_1 = R_1$, $Z_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \dfrac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$

e $R_4 = Z_4$:

$$\overbrace{\frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_1}}^{Z_2} \cdot \underbrace{\left(R + j\omega\frac{C}{\gamma^2}\right)}_{Z_3} = \overbrace{R_1 R_4}^{Z_1 Z_4}$$

con il ponte bilanciato

$$R_2\left(R + j\omega\frac{C}{\gamma^2}\right) = R_1R_4(1 + j\omega C_2 R_2)$$

$$R_2 R = R_1 R_4 \longrightarrow R = \frac{R_1 R_4}{R_2}$$

$$\frac{C}{\gamma^2}\cancel{R_2} = R_1 R_4 \cancel{R_2} C_2 \longrightarrow C = \gamma^2 R_1 R_4 C_2$$