082742 – Elettrotecnica (E-O)

Prof. F. Bizzarri

Esame, 8 Settembre 2014

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Firma** ______________________

AVVERTENZE

- La prova dura **3 ore e mezza**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a **16 punti** invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2.0 punti	E2a 4.0 punti	E2b 3.0 punti	E2c 2.0 punti	E3a 4.0 punti	E3b 5.0 punto	E4a 4.0 punti	E4b 4.0 punti
Voto								

Voto Finale

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1a

Discutere la legge di Kirchhoff per le tensioni a partire dalla legge di Faraday-Henry.

Si vedano le dispense del corso paragrafi 8.2, 1.5 e 1.6

E2a

Per il circuito in Figura 1 si ricavi l'equazione di stato che ne governa la dinamica e se ne discuta la stabilità. ~~L'operazionale~~ l'amplificatore operazionale è ideale e funziona in zona lineare ($v_{+-} = 0$).

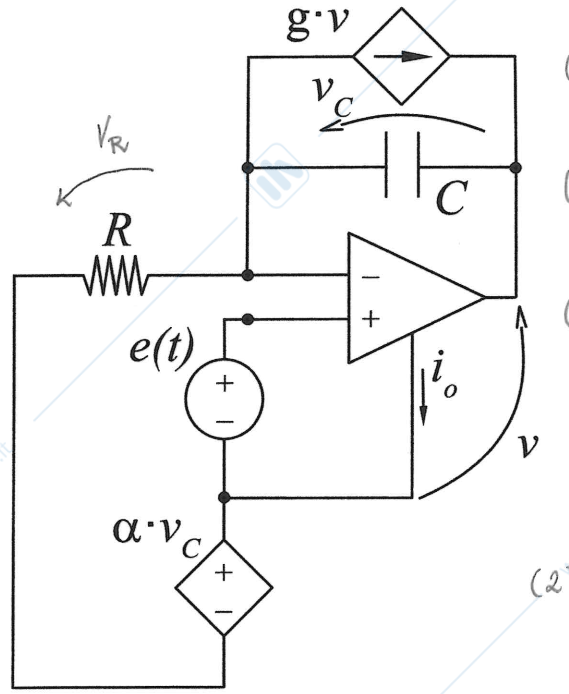


Figura 1

(1) $V_R + \alpha V_c + e(t) = 0$

(2) $\dfrac{V_R}{R} = gV + C\dfrac{dV_c}{dt}$

(3) $e(t) - V_c - V = 0$

$V = e(t) - V_c$

$$(2) \rightarrow \frac{1}{R}\left(-\alpha V_c - e(t)\right) = g\left(e(t) - V_c\right) + C\frac{dV_c}{dt}$$

$$C\frac{dV_c}{dt} = \left(-\frac{\alpha}{R} + g\right)V_c - \left(\frac{1}{R} + g\right)e(t)$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{Rg - \alpha}{RC}V_c - \frac{1 + Rg}{RC}e(t)$$

$$\lambda = \frac{Rg - \alpha}{RC}$$

$Rg - \alpha > 0$ CIRCUITO INSTABILE

$Rg = \alpha$ CIRCUITO STABILE

$Rg - \alpha < 0$ CIRCUITO ASSOLUTAMENTE STABILE

E2b

Per il circuito in Figura 1 si assuma $e(t) = 2V_0\, u(t)$ e $v_C(0^-) = V_0$. Si determini $v_C(t)$ per $t \geq 0$. [Nota: $u(t)$ è la funzione gradino unitario]

V_c è variabile di stato dato che è l'unica candidata ad esserlo e non ci sono relazioni algebriche tra V_c e l'ingresso $e(t)$. Ne consegue che $V_c(t)$ è più continua dell'ingresso $e(t)$ e quindi, dato che $e(t)$ è discontinua di prima specie in $t=0$, $V_c(0^-) = V_c(0^+) = V_c(0)$. $V_c(t)$ è quindi continua in 0 e $V_c(0) = V_0$.

$$V_c(t)\Big|_{t \geq 0} = K e^{\lambda t} + H$$

con H costante dato che $e(t) = 2V_0$ per $t > 0$.

$$\frac{dH}{dt} = \emptyset = \frac{R_g - \alpha}{RC} H - \frac{1+R_g}{RC} 2V_0$$

$$H = \frac{1+R_g}{R_g - \alpha} 2V_0$$

$$V_c(0) = V_0 = K + \frac{1+R_g}{R_g - \alpha} 2V_0$$

$$K = \frac{R_g - \alpha - 2 - 2R_g}{R_g - \alpha} \cdot V_0 = -\frac{\alpha + 2 + R_g}{R_g - \alpha} V_0$$

$$V_c(t) = -\frac{\alpha + 2 + R_g}{R_g - \alpha} V_0\, e^{\frac{R_g - \alpha}{RC} t} + \frac{1 + R_g}{R_g - \alpha} 2V_0$$

E2c

Per il circuito in Figura 1, nelle stesse ipotesi del punto precedente, si determinino $i_o(0^-)$ e $i_o(t)$ per $t\in(0^+,+\infty)$.

La corrente $i_o(t)$ non è variabile di stato e quindi, in generale, potrà essere discontinua come l'ingresso.

$$i_o(t) = \frac{V_R}{R}$$ dato che $e(t)$ non è percorso da corrente

$$V_R = -\alpha V_c - e(t)$$

$$i_o(t) = -\frac{1}{R}\left(e(t) + \alpha V_c\right)$$

$$i_o(t)\Big|_{0^-} = -\frac{1}{R}\left(0 + \alpha V_0\right) = -\frac{\alpha V_0}{R}$$

$$i_o(t)\Big|_{t>0} = -\frac{1}{R}\left(2V_0 + \alpha V_c(t)\right)$$

con $V_c(t)$ calcolata al punto E2b.

E3a

Il circuito in Figura 2 evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω. Determinare la matrice [$Z(j\omega)$] che descrive il doppio bipolo racchiuso nell'area grigia rispetto al vettore di correnti descrittive $(i_a, i_b)^T$.

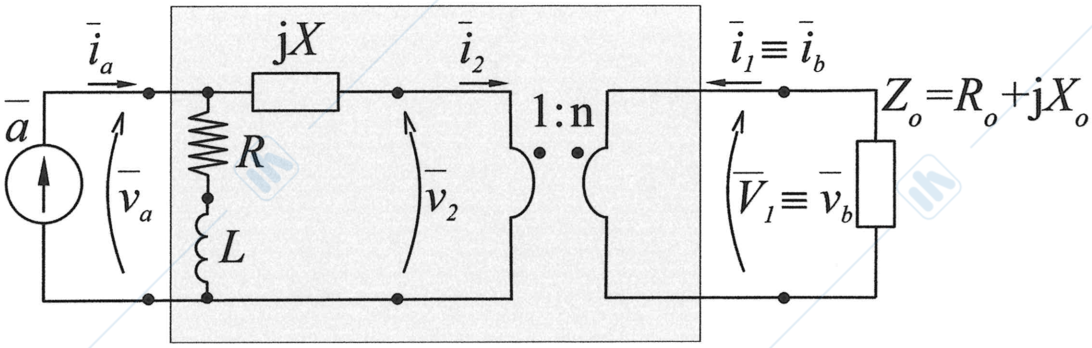


Figura 2

$\bar V_1 = n\bar V_2$ $\quad \bar I_2 = -n\bar I_1$

$$\begin{bmatrix} \bar V_a \\ \bar V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar I_a \\ \bar I_b \end{bmatrix}$$

Prove semplici:

1) $\bar I_b \equiv 0$ $\quad \bar V_a = Z_{11}\bar I_a$ e $\bar V_b = Z_{21}\bar I_a$

se $\bar I_b = \bar I_1 = 0 \longrightarrow \bar I_2 = 0$ e $\bar V_a = \underbrace{(R+j\omega L)}_{Z_{11}}\bar I_a$

$\bar V_b = \bar V_1 = n\bar V_2 = n\bar V_a$ dato che in jX non scorre corrente $(\bar I_2 = 0)$

$\bar V_b = \underbrace{n(R+j\omega L)}_{Z_{21}}\bar I_a$

2) $\bar I_a \equiv 0$ $\quad \bar V_a = Z_{12}\bar I_b$ e $\bar V_b = Z_{22}\bar I_b$

$\bar I_2 = -n\bar I_1 = -n\bar I_b$ $\quad \bar V_2 = [-R - j(\omega L + X)]\bar I_2$

$\bar V_2 = -[R + j(\omega L + X)](-n\bar I_b) = n[R + j(\omega L + X)]\bar I_b$

$\bar V_b = \bar V_1 = n\bar V_2 = \underbrace{n^2[R + j(\omega L + X)]}_{Z_{22}}\bar I_b$

$$\bar{V}_a = \frac{R+j\omega L}{R+j(\omega L+X)}\,\bar{V}_2 = \frac{(R+j\omega L)}{\cancel{R+j(\omega L+X)}}\, n\left[\cancel{R+j(\omega L+X)}\right]\bar{i}_b =$$

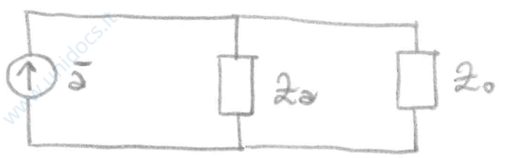
$$= \underbrace{n(R+j\omega L)}_{Z_{12}}\,\bar{i}_b$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R+j\omega L & n(R+j\omega L) \\ n(R+j\omega L) & n^2\left[R+j(\omega L+X)\right] \end{bmatrix}$$

E3b

Per il circuito in Figura 2 che evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω, si ricavino il rapporto di trasformazione n e la reattanza *X* che consentono di ottenere il massimo trasferimento in potenza tra la sorgente e il carico Z_o. (<u>Suggerimento</u>: Non è necessario utilizzare la matrice [Z] ricavata al punto precedente)

Riportiamo il circuito nella forma



per il quale la condizione di massimo trasferimento in potenza cercata è $Z_o = Z_a^*$

È sufficiente passivare $\bar{a}$ e ricavare l'impedenza vista da Z_o.

$$\bar{V}_1 = n\bar{V}_2 = n\left(R+j(\omega L+X)\right)(-\bar{i}_2) = n\left(R+j(\omega L+X)\right)(n\,\bar{i}_1) =$$

$$= n^2\left(R+j(\omega L+X)\right)\bar{i}_1 = Z_a\,\bar{i}_1$$

$$\left[n^2\left(R+j(\omega L+X)\right)\right]^* = R_0 + jX_0$$

$$n^2\left(R-j(\omega L+X)\right) = R_0 + jX_0$$

$$\begin{cases} n^2 R = R_0 \\ -n^2(\omega L + X) = X_0 \end{cases} \qquad n = \sqrt{\frac{R_0}{R}}$$

$$-\frac{R_0}{R}(\omega L + X) = X_0$$

$$\omega L + X = -\frac{R}{R_0} X_0$$

$$X = -\left(\frac{R}{R_0} X_0 + \omega L\right)$$

E4b

Per il circuito in Figura 3, nella ipotesi del punto E4a, si determini la potenza attiva erogata dal generatore di corrente. Si ricavi quanto richiesto in funzione del fasore della tensione *v*(*t*) che si assume quindi noto.

$$\hat{P}^e_{\bar{a}} = \frac{1}{2}(\alpha+1)\bar{V}\,\bar{a}^* = \frac{1}{2}(\alpha+1)\bar{V}(-jA)^* = \frac{1}{2}(\alpha+1)j\bar{V}A \in \mathbb{C}$$

$$P^e_{\bar{a}} = \mathrm{Re}\left\{\hat{P}^e_{\bar{a}}\right\} = \frac{1}{2}(\alpha+1)A\,\mathrm{Re}\left\{j\bar{V}\right\}$$

FACOLTATIVO :

$$P^e_{\bar{a}} = \frac{1}{2}(\alpha+1)A\,\mathrm{Re}\left\{\frac{j\omega LRA}{(\alpha+1)R+j\omega L}\right\} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha+1)\omega LRA^2}{(\alpha+1)^2R^2+\omega^2L^2}(-\omega L) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\alpha+1)\omega^2L^2RA^2}{(\alpha+1)^2R^2+\omega^2L^2} \qquad \left[\frac{\Omega^3A^2}{\Omega^2}\right] = \left[\Omega A^2\right] = \left[VA\right] = \left[W\right]$$