28/9/21

in generale non esistono soluzioni analitiche delle equazioni differenziali ordinarie

ci sono alcune classi di equazioni per cui siamo in grado di scrivere la soluzione analitica

VARIABILI SEPARABILI

$$\boxed{y'(t) = b(t)\, a[y(t)]}$$

* è di classe C^1, ovvero è continua insieme alla sua derivata I

posso raccogliere i termini che dipendono dal tempo che moltiplica un'altra funzione che dipende in modo esplicito dalla variabile y

se $a[y(t)] = 0$ per $y = \text{cost}$, allora l'equazione è soddisfatta

$y = \text{cost} = c \qquad a(c) = 0 \quad , \quad y' = \frac{dc}{dt} = 0$

$b(t)$ deve essere continua

$a(y)$ deve essere continua

$f(t,y) = b(t)\, a(y)$

la $f(t,y)$ deve essere localmente LIPSCHITZIANA

↳ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial b(t)\, a(y)}{\partial y} = b(t) \frac{\partial a(y)}{\partial y}$

$b(t)$ è già continua, anche la $\frac{\partial a(t)}{\partial y}$ deve essere continua

$$\boxed{\text{se } b(t): \text{CONTINUA} \quad \text{e} \quad a(y): C^1 \,*}$$

↳ sono verificate le le IPOTESI del teorema di esistenza e unicità

↳ LA SOLUZIONE del PROBLEMA di CAUCHY è UNICA

$y'(t) = b(t)\, a[y(t)]$ $\quad y = \bar{c}$ $\quad a(y) \neq 0$

$$\frac{1}{a[y(t)]} \frac{dy}{dt} = b(t)$$

SPIEGAZIONE (I)

prendo una funzione:

$$\frac{dA}{dy} = \frac{1}{a}$$

$A[y(t)]$ che sia una primitiva rispetto ad y della funzione $\frac{1}{a}$

$A[y(t)]$: È una funzione composta del tempo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} y' = b(t)$$

A è una primitiva rispetto ad y della funzione $\frac{1}{a}$

A è una primitiva della funzione $b(t)$ rispetto a t

$A(y)$ è una primitiva della funzione $\frac{1}{a(y)}$

$A[y(t)] = A(t)$ è una primitiva della funzione $b(t)$

$$\frac{dA}{dy} = \frac{1}{a(y)} \qquad \int \frac{dA}{dy}\, dy = \int \frac{1}{a(y)}\, dy \qquad A(y) = \int \frac{1}{a(y)}\, dy$$

sono la stessa f

$$\frac{dA}{dy} = b(t) \qquad \int \frac{dA}{dt}\, dt = \int b(t)\, dt \qquad A(t) = b(t)\, dt$$

quindi $$\boxed{\int \frac{1}{a(y)}\, dy = \int b(t)\, dt + C}$$

$$\frac{1}{a(y)} \frac{dy}{dt} = b(t) \qquad a(y) \neq 0$$

SPIEGAZIONE (II)

$$\frac{1}{a(y)} \frac{dy}{dt}\, dt = b(t)\, dt \qquad \frac{1}{a[y(t)]} \frac{dy}{dt}\, dt = b(t)\, dt$$

$$\int \frac{1}{a[y(t)]} \frac{dy}{dt} dt = \int b(t)\, dt + C_1 \qquad y' = b(t)\, a[y(t)]$$

$$\frac{dy}{dt} dt = dy$$ cambio di variabile

$$\int \frac{1}{a[y(t)]} dy = \int b(t)\, dt + C_1$$ ottengo la stessa formula per la risoluzione del caso I

Non è detto che posso invertire $A(y)$ per trovare una espressione esplicita della y

ESEMPIO

1. $t(1+y^2)\,y' = 3$

la scrivo in forma NORMALE

$$y' = \frac{3}{t(1+y^2)} = \frac{3}{t} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

$$b(t) = \frac{3}{t} \qquad a(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

esiste la soluzione del problema di CAUCHY? è unica?

Continua tranne in $t=0$

il dominio in t: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

(prendo uno degli intervalli in base alla condizione iniziale)

t: $D_1\ (-\infty; 0)$ $D_2\ (0; \infty)$

$y \in \mathbb{R}$

DOMINIO della FUNZIONE $(-\infty;0)\times\mathbb{R}$ e $(0;+\infty)\times\mathbb{R}$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{1+y^2}\right] = \frac{3}{t}\cdot\frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

il dominio è sempre $(-\infty;0)\times\mathbb{R}$ e $(0;+\infty)\times\mathbb{R}$

$$\lim_{y\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{t}\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right) = 0$$ la derivata è continua e LIMITATA

la funzione è GLOBALMENTE LIPSCHITZIANA

1 $t_0 < 0$ $y_0\in\mathbb{R}$ e 2 $t_0 > 0$ $y\in\mathbb{R}$

ESISTE la SOLUZIONE PER I DUE INTERVALLI

$$y' = \frac{3}{t}\,\frac{1}{1+y^2} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{t}\,\frac{1}{1+y^2}$$

$$(1+y^2)\frac{dy}{dt} = \frac{3}{t} \qquad (1+y^2)\frac{dy}{dy} = \frac{3}{t}dt$$

$$(1+y^2)\,dy = \frac{3}{t}dt \qquad \int(1+y^2)\,dy = \int\frac{3}{t}dt + C$$

$$y + \frac{y^3}{3} = 3\ln|t| + c$$

posso prendere $t>0$ $\quad y+\frac{y^3}{3} = 3\ln(t)+c$

$t<0$ $\quad y+\frac{y^3}{3} = 3\ln(-t)+c$

queste due soluzioni non comunicano tra loro

② $e^{t+y}\, y' = -t$

$y' = \frac{-t}{e^{t+y}}$ $\qquad y' = -\frac{t}{e^y \cdot e^t} = \frac{1}{e^y} \cdot \frac{t}{e^t}$

$a(y) = \frac{1}{e^y}$ $\qquad b(t) = \frac{t}{e^t}$

il denominatore è continuo in $\mathbb{R}^2$

$f(t,y) = -\frac{t}{e^{t+y}}$ è definita su $\mathbb{R}^2$

$\lim_{t\to\infty} f(t,y) = 0 \qquad \lim_{y\to\infty} f(t,y) = +\infty$

$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}\left(-\frac{t}{e^t} \cdot e^{-y}\right) = -\frac{t}{e^t} \cdot e^{-y}(-1) = -\frac{t}{e^t e^y}$

la funzione è localmente LIPSCHITZIANA su $\mathbb{R}^2$

$y(0) = 0$: CONDIZIONE INIZIALE

la soluzione esiste in un intorno I di t_0

I: $t = 0\ [-\delta; +\delta] \qquad \delta > 0$

$e^y y' = -\frac{t}{e^t} \qquad e^y \frac{dy}{dt} = -\frac{t}{e^t} \qquad e^y dy = -\frac{t}{e^t} dt$

$\int e^y dy = \int -\frac{t}{e^t} dt \qquad e^y = -\int \frac{t}{e^t} dt + A$

Integro per parti: $-\int t e^{-t} dt$

$-\int e^{-t} dt + \int \frac{d}{dt}\left(te^{-t}\right) dt =$

$e^{-t} + te^{-t}$

$e^y = e^{-t} + te^{-t} + A$

la y è nota in forma implicita

$\ln e^y = \ln(e^{-t} + te^{-t} + A)$

$y = \ln[e^{-t}(1 + t + Ae^t)]$

$y = -t + \ln(1 + t + Ae^t)]$

$t \in \mathbb{R} \quad 1 + t + Ae^t > 0 \quad t_0 \quad 1 + t_0 + Ae^{t_0} = 0 \quad t > t_0$

$y(t) = -t + \ln(1 + t + Ae^t) \qquad y(0) = 0 + \ln(1 + 0 + A) =$
$= \ln(1 + A)$

$A = 0 \quad y(t) = -t + \ln(1 + t) \quad t > -1 \quad 1 + t > 0 \quad t > -1$