/ CAMPO DELLE DIREZIONI - Eq e sistemi di forma normale

Se sono soddisfatte le Hp del teorema $\exists!$, per $\forall$ pnt $P_0 \in D$ passa il grafico di 1 e 1 sola soluz., $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$. E' possibile associare all'eq diff $y' = f(t, y)$ il campo vettoriale definito su D: $\underline{V} = \underline{i} + f(t, y)\,\underline{j}$ CAMPO DIREZIONI

$\forall$ soluz e' tangente in $\forall$ suo punto ad un vettore del campo

TEO $\exists!$ GRANDE

PC $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $S = \underbrace{[\alpha, \beta]}_{t} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{y}$, P_0 interno a S

interv. in cui e' definito

a) $f(t, y) \in C^0(S)$
b) $f_y(t, y) \in C^0(S)$] come $\exists!$ LOCALE

c) f deve essere limitata in S $|f(t, y)| \le A + B|y|$ $\forall (t, y) \in S$

valore assoluto di f $\le$ di una retta A, B cost opportune

$\Rightarrow \exists!\ y = y(t)$ soluz di PC in $[\alpha, \beta]$

PROLUNGABILITA'

Data $y' = a(t)y + b(t)$ Eq lineare $a(t), b(t) \in C^0(I)$ funz continue di t

$\Rightarrow$ ogni soluz di y' e' prolungabile a I

Dim. $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ t_0 interno a I

a) $a(t)y + b(t)$ continuo in $S = I \times \mathbb{R}$ c) $\forall [\alpha, \beta] \in I$ $|f_y(t, y)| = |a(t)| \le \max_{[\alpha, \beta]} |a(t)|$

b) $f_y(t, y) = a(t)$

TEO REGOLARITA'

Data $y' = f(t, y)$ $f \in C^1(D)$ derivab in D e $y = y(t)$ soluz in I intervallo

$\Rightarrow y = y(t)$ e' deriv 2 volte $\to$ la cosa si esclude per qualsiasi grado di derivaz

$y = y(t) \in C^2(I)$ se $f \in C^k(D) \Rightarrow y(t) \in C^{k+1}(I)$

se $f \in C^\infty(D) \Rightarrow y \in C^\infty(I)$

TEO PEANO

Sia $P_0 = (t_0, y_0)$ interno a D $\Rightarrow \exists\ y = y(t)$ soluzione del PC in $I_\delta = [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$

TEO $\exists!$ LOCALE

PC $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $f, f_y \in C^0(D)$ continue in D, P_0 interno a D

$\Rightarrow \exists!\ y = y(t)$ sol di PC in $I_\delta = [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ per $\delta > 0$ opportuno

TEO $\exists!$ LOCALE PER SISTEMA

PC $\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$ $P_0 = (t_0, \dots y_n)$ interno a D $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Hp

a) $\underline{f} \in C^0(D)$ continua su D $\iff f_i(t, y_1 \dots y_n) \in C^0(D)$ $\Rightarrow$ $\exists!$ sol $\underline{y} = \underline{y}(t)$ in $I_\delta = (t_0 - \delta; t_0 + \delta)$

b) $D_y \underline{f} \in C^0(D)$

REGOLARITÀ

$y' = f(t,y)$ $\quad y = y(t)$ è soluz in I $\quad f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^k(D)$

$\Rightarrow y(t) \in C^{k+1}(I)$

INSIEME DI DEFINIZIONE $\subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\exists !$ IN GRANDE PER SISTEMA

$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\quad S = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, con ($t_0 \in [\alpha, \beta]$)

a) $f \in C^0(S)$

b) $D_y f \in C^0(S)$ $\quad \Rightarrow \exists !$ soluz in $[\alpha, \beta]$

c) $D_y f$ limitato in S

2 - Sistemi lineari

$y' = A(t)y + b(t)$ $\quad A(t), b(t) \in C^0(I)$

$b(t) = 0$ omogeneo

$b(t) \neq 0$ completo

2 sist si dicono ASSOCIATI se hanno la stessa matrice dei coeff.

PRINC DI SOVRAPPOSIZIONE

Sia data $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$

a) se $y_{P_1}(t)$ è SOL. PARTICOLARE di $y'' + ay' + by = f_1(t)$

b) se $y_{P_2}(t)$ è " di $y'' + ay' + by = f_2(t)$

$\Rightarrow y_P(t) = y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t)$ è SOL PARTICOLARE di $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$

SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$\underline{y}' = A(t)\, y$ $\quad A(t)_{n \times n} \in C^0(I)$

PROPRIETÀ

1. $\underline{y}(t) = \underline{0}$ è sempre soluz.
2. se $y = y(t)$ è soluz $\Rightarrow y = c\,y(t)$ è soluz
3. $y = y^1(t)$ e $y = y^2(t)$ sono soluz $\Rightarrow y = y^1(t) + y^2(t)$ è soluz
4. se $c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t)$ è soluz $\Rightarrow$ insieme soluz è spazio vettoriale
5. se, per $t_0 \in I$, $y(t_0) = 0$

$\Rightarrow \underline{y}(t) = \underline{0}$ per $\forall t \in I$

TEO DI STRUTTURA

Data $y' = A(t) \cdot y$ $\quad A(t) \in C^0(I)$ funz continue nell'int. I

MAT COEFF

se $y^1(t), y^2(t) \dots y^n(t)$ INT PART del sistema lineare indip

$\Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y^i(t)$ $\quad$ SOMMATORIA

MAT WRONSKIANA

Siano $y^1(t), y^2(t), \dots y^n(t)$ n soluz di un sistema lineare omogeneo $y' = A(t)\,y$

Definisco $W(t)$ matrice $n \times n$ che ha come colonne tali soluzioni

$y(t) = W(t)\, c$ $\quad c$ vettore di n cost arbitrarie

$W(t) = [\, \underline{y}^1(t) \,;\, y^2(t) \,;\, \underline{y}^n(t) \,]$

PROPRIETA'

a) CNS n vettori soluzione $y^i(t)$ formano un sistema fondam è che $\det w(t) \neq 0$

b) $w'(t) = A(t)\, w(t)$

c) se $\det w(t_0) = 0 \Rightarrow \exists\, (w(t))^{-1}$

MATRICE DI TRANSIZIONE $w(t) \mid w(t_0) = I_n$ $\quad w(t, t_0)$ t.c. $w(t_0, t_0) = 1$

MATRICE ESPONENZIALE

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad e^B = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \underset{\text{MAT DI TRASPORTO}}{U}\, e^{Bt}\, U^{-1} \qquad e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\operatorname{sen} bt \\ \operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

OSCILLATORE ARMONICO

Massa fissata ad una molla con cost K che scivola sotto azione di una forza esterna $f(t)$

$my'' = F$ $\qquad$ F dipende da $\begin{cases} F \text{ di richiamo dell'oscillatore} \\ \text{Termine di smorzamento} \\ \text{Forzante} \end{cases}$

$$m y''(t) = -Ky - \underset{\text{COST DI ATTRITO}}{h}\, y' + f(t)$$

- $\nexists f(t)$ e smorzamento $y''(t) + w^2 y = 0$ con $w = \sqrt{\frac{K}{m}}$

  Int generale $y(t) = a \cos wt + b \operatorname{sen} wt$

1 - SMORZATO $\quad my'' + hy' + Ky = 0 \quad w = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \beta = \frac{h}{2m}$

$y'' + 2\beta y' + w^2 y = 0$ $\quad$ Eq caratt $\lambda^2 + 2\beta\lambda + w^2 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - w^2}$

2 - FORZATO $\quad my'' + Ky = F_0 \cos(\Omega t + \alpha_0)$

Int generale $z(t) = a \cos wt + b \operatorname{sen} wt$

$I_p(t) = C_0 \cos(\Omega t) + D_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$ $\quad \Omega \neq w$

$I_p(t) = t\,(C_0 \cos \Omega t + D \operatorname{sen} \Omega t)$ $\quad \Omega = 0$ RISONANTE

RISONANZA $\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen}(\lambda t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

SERIE TRIGONOMETRICHE

3. Serie

Def. $f(x)$ è PERIODICA di periodo T se $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in D_f$

POLINOMIO TRIGONOMETRICO grado m

$$P_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \qquad T = 2\pi \qquad m = k$$

SERIE TRIGONOMETRICHE

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos kx}{k^2+1} + (-1)^k \frac{\operatorname{sen} kx}{k!} \right)$$

CONVERGENZA se a_k e $b_k \not\to 0$ Σ NON CONVERGE

se a_k e $b_k \to 0$ Σ CONVERGE TOTALMENTE in $\mathbb{R}$

SERIE DI FOURIER

$$f \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

a_k, b_k COEFF DI FOURIER

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \qquad k = 0, 1 \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt \qquad k = 1, 2 \dots$$

PARI $b_k = 0$

DISPARI $a_k = 0$ $a_0 = 0$

$\frac{a_0}{2} = f_M$ MEDIA di f_x su $[a;b]$ $\quad V_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$

CONV. PUNTUALE

ΣF conv punt a $f(x)$ se F cont e derivab con derivate finite oppure se discontinuità 1ª specie

CONV UNIFORME

Σf conv uniform a F su $\mathbb{R}$ se $F \in C^1(\mathbb{R})$

Σf " a F in $\forall [a;b]$ in cui $F \in C^1$

Σf " a F con un n° finito di disc di 1ª specie

a F in L^2 se $\int_{(a)\,0}^{(b)\,\pi} f^2 = +\infty$

UGUAGL. DI PARSEVAL

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \|f\|^2$$

TEO DERIVAZIONE PER SERIE

$f_n(x)$ derivabile in $[a,b]$, $\Sigma f'_n(x)$ conv UNIFORM. in $[a;b]$, $\exists x_0 \in [a;b]$ $\Sigma f(x_0)$ CONV

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) = \varphi(x)$ UNIFORM in $[a;b]$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \varphi'(x)$$

CONV UNIFORME

Serie di potenze

$|x| \leq r < 1$ $\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

- se $R > 0$ conv sempre e assolut per $|x| < R$
- $\forall r < R$ CONV UNIF e TOT su $|x| \leq r$
- NON CONV se $|x| > R$

TEO DERIVAB / INTEGRAZIONE **serie di potenze**

$f(x) = \sum a_n x^n$ può essere integ/deriv per serie in $-R < x \leq R$

$f'(x) = \sum_1^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ $F(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

CRITERIO DI WEIERSTRASS

Sia $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall x \in T$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ CONV UNIF. SU T

C.S. "Una serie di funzioni converge totalmente su T se soddisfa Weiestrass"

CONV TOTALE

$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(P)$ CONV TOTALM in E se

a) $\varphi_n(P)$ è limitata

b) Detto $L_n \geq 0$ estremo sup di $|\varphi_n(P)|$ in E, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ è CONVERG.

CONV IN NORMA L_2

$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$

L^∞ $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a;b]} |f(x)| = \max_{[a;b]} |f(x)|$

L^1 $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

ANALITICA Una funz si dice analitica in c se coincide in tutto un intorno di c con la sua serie di Taylor con centro c

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$ in $U(c)$

4- Successioni

CONV PUNTUALE $\rightarrow$ Non conserva la continuità

$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ succ. somme parziali n-esime, se $\forall x \in T$, $\Phi_n(x) \rightarrow \Phi(x)$

la serie è CONV e la sua somma è a sua volta una funz definita in T

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \Phi(x)$

CONV UNIFORME $\rightarrow$ Conserva la continuità

la succ $\{f_n(x)\}$ C.U a $f(x)$ su T se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \Rightarrow$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in T$

Def Si dice $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \varphi(x)$ UNIFORMEM su T se $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ uniform su T

ORBITA PERIODICA

γ linea di livello di $E(x,y)$ è chiusa, $\nexists$ P_0 di eq, $P \in \gamma$ $\Rightarrow \gamma$ è PERIODICA

ORBITA: luogo che in $\forall$ suo pnt è tg al campo delle direzioni

METODO DI EULERO

Si basa sull'idea geometrica che ogni soluzione di un eq diff deve seguire il campo direzionale.

Data un'eq diff $y' = f(t,y)$ e $P_0(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$P_C \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \exists!\ y = y(t) \text{ sol in } I\,[t_0 ; t_0 + \delta]$$

Fissato un incremento h per t, osservo che la soluz passante per P_0 deve avere in tal pnt pendenza $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$. Possiamo approx valore della soluz in $t_1 = t_0 + h$ con $y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$.

Analogamente con $t_2, t_3 \dots$ Iterando il procedimento avremo la seguente formula ricorsiva

$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$

La spezzata poligonale ottenuta congiungendo i pnt (t_k, y_k) APPROX soluz esatta

Per $h \to 0$ spezzata tende soluz esatta

Eq variabili separate

$y'(t) = a(t) \cdot b(y(t))$

se $\bar{y} : b(\bar{y}) = 0$ $\quad y(t) = \bar{y}$ è SOL $\qquad y(t) = z$

Se $y \neq \bar{y}$ sep. variab $\displaystyle\int \frac{y'(t)}{b(y(t))}\, dt = \int a(t)\, dt \qquad z' = y'(t)\, dt$

$$\underbrace{\int \frac{1}{b(z)}\, dz}_{B(z)} = \underbrace{\int a(t)\, dt}_{A(t)} \qquad B(y(t)) = A(t) + c \qquad y(t) = B^{-1}(A(t) + c)$$

Eq diff 1° ord. lineari

$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$ COMPLETA

$y'(t) = a(t)\, y(t)$ OMOGENEA

$$y(t) = \underbrace{c\, e^{\int a(t)}}_{OM} + \underbrace{e^{\int a(t)} \int e^{-\int a(t)}\, b(t)\, dt}_{COMPLETA}$$

Eq Bernoulli

$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\, y^{\alpha}(t)$ $\quad a(t), b(t)$ cost $\quad \alpha = 0$ Lineare

Se $\alpha > 0$ $\quad y = 0$ sol dell'eq

Divido per y^{α} $\quad \dfrac{y'}{y^{\alpha}} = a(t)\, y^{1-\alpha} + b(t)$

$z(t) = y^{1-\alpha} \qquad z'(t) = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} y'$

$\dfrac{z'}{1-\alpha} = a(t)\, z(t) + b(t) \qquad z' = (1-\alpha)\, a(t)\, z(t) + (1-\alpha)\, b(t)$ Eq lin in z

Eq diff esatte

$y'(t) = -\dfrac{P(t, y(t))}{Q(t, y(t))} \qquad P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$ Aperto, connesso

$P(t, y(t))\,dt + Q(t, y(t))\,dy = 0 \iff \frac{dF}{dt} = 0$

E' esatta se $\exists F(t,y) \in C^2(D)$ t.c. $P = \frac{\partial F}{\partial t}$ $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

$F(t, y(t)) = c$ int gen in forma implicita

Se $\exists F$ $F(t,y) = \int_{t_0}^{t} P + \int_{y_0}^{y} Q = \int_{t_0}^{t} P(s, y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} Q(t,s)\,ds$

$= \int_{y_0}^{y} Q(t_0, s)\,ds + \int_{t_0}^{t} P(s, y)\,ds$

5 - Eq Autonome

INTEGRALE PRIMO

Dato $y' = f(y)$, $\underline{v} = y'$ diremo che $E(y) = E(x,y)$ e' int PRIMO per il sistema se

a) $\nabla E \cdot v = 0$ $\forall (x,y) \in A$ $E(x,y) \in C^1(A)$ $E_x f + E_y g = 0$

b) $\nabla E \neq 0$ $\forall y \neq$ pnt di eq

PROPRIETA'

Se $E(x,y)$ e' int PRIMO $\Rightarrow E(x(t), y(t)) = c$ $\forall$ soluz

$\Rightarrow$ SISTEMI CONSERVATIVI A 1 GDL

$\ddot{x} = F(x)$ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(x) \end{cases}$

INT PRIMO $E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \int_0^x F(t)\,dt = E_c + U$

pnt MIN FORTE di U pnt STABILI CENTRI

MAX pnt INST SELLE

ORBITA PERIODICA

γ linea di livello di $E(x,y)$ chiusa, $\nexists$ pnt di eq, $P \in \gamma \Rightarrow \gamma$ e' PERIODICA

ORBITA: linea che in $\forall$ suo pnt e' tg al campo delle direzioni

EQ DI MALTHUS

$\begin{cases} \dot{N}(t) = \varepsilon N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$ $N(t)$: n° individui at tempo t

ε: tasso accrescimento

SOLUZIONE $N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}$

TEO DI KAMKE

P.C. n $\begin{cases} y' = f_n(t,y) \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$ PC eq $= \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{cases}$

a) $\frac{\partial}{\partial y} f_n, f, f_y \in C^0(D)$ $P_n = (t_n, y_n)$ $\bar{P}$ interno a D

b) $P_n \to \bar{P}$

c) $f_n(t,y) \to f(t,y)$ UNIFORM in D

$y = y_0(t)$ soluz in $[a;b]$ e $y = y(t)$ sol in $[\alpha;\beta] \Rightarrow y_n(t) \to y(t)$ UNIFORM in $[a;b]$

SERIE

Princ sovrapp vale per il termine forzante = somma di ∞ termini

se $S_n = \sum^{n} f_n$ CONV UNIF a $f(x) = \sum^{\infty}$ =>
di un prob

la soluz con un n° finito di termini forzanti conv unif a sol prob con ∞ termini forzanti

STABILITA'

$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases}$ → AUTONOMO → SPAZIO DELLE FASI => considero t come parametro

$x(t)$ $y(t)$ coppia eq param

un pnt tc $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ si chiama PUNTO CRITICO

CICLI: orbite chiuse da una chiusa → soluz periodiche

STABILE

pnt eq $P(x_0, y_0)$ si dice STABILE se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. se $|q - P| \leq \delta$ =>

=> ~~$\varphi(t; q)$ $\exists \forall t \geq 0$ $\underline{\varphi}(t; q)$~~

a) $\underline{y} = \underline{\varphi}(t)$ prol e def in $[0; +\infty)$

b) $\| \underline{\varphi}(t) - \underline{P} \| < \varepsilon$ $\forall t \in [0; +\infty)$

AS STABILE se

c) $\lim_{t \to +\infty} \underline{\varphi}(t) = \underline{P}$

P stabile quando dato int vicino a p eq, soluz non si allontana da soluz di eq