TEOREMA ESISTENZA e UNICITÁ in PICCOLO

Hp: pc. $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, $P_0(t_0, y_0)$ interno a D

$f, f_y \in C^0(D)$

Th: Esiste una sola soluzione $y = y(t)$ interna a $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

TEOREMA ESISTENZA e UNICITÁ in GRANDE

Hp: pc. $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, $\underset{\text{striscia}}{\underset{\downarrow}{S}} = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$, $P_0(t_0, y_0)$ interno a S

$f \in C^0(S)$,

$f_y \in C^0(S)$,

la funzione deve crescere al più linearmente rispetto a y

$|f(t,y)| < A + B|y|$, $\forall (t,y) \in S$ funzione deve essere limitata (no e^x)

Th: Esiste una sola soluzione $y = y(t)$ interna a $[\alpha, \beta]$

PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

Hp: 2 sist. lineari associati

$y_1' = A(t) y_1 + b_1(t)$, $y = y_1(t)$ é soluz.

$y_2' = A(t) y_2 + b_2(t)$, $y = y_2(t)$ é soluz.

Th: Se moltiplichiamo una costante C_1 al primo e una costante C_2 al secondo

$\Rightarrow y(t) = y_1(t) C_1 + y_2(t) C_2$ soluzione di

$y' = A(t) y + (C_1 b_1(t) + C_2 b_2(t))$

TEOREMA DI STRUTTURA di un' EQUAZIONE OMOGENEA

Hp: $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$, $a(t) \neq 0, b(t), c(t)$ cont. su I

Th: lo spazio vettoriale e' dato da tutte le combinazioni lineari: $y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{soluz. lineari indipendenti del sistema}}$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

TEOREMA DI STRUTTURA di un' EQUAZIONE COMPLETA

Hp: $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)$, $a(t), b(t), c(t)$ cont in I

Th: la soluz. e': $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \underbrace{y_p(t)}_{\text{soluz. dell' int. particolare}}$

METODO DI VARIAZIONE delle COSTANTI ARBITRARIE

Hp: sistema lineare completo: $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + b(t)$

$z_1(t), \dots, z_n(t)$ sono soluzioni del sistema lineare omogeneo associato, $W(t)$ e' matrice WRONSKIANA $W(t) = [z_1(t), \dots, z_n(t)]$ (soluz. sist. lin omog sono le colonne di $W(t)$)

Th: l' integrale particolare del sistema lineare completo e':

$$y_p(t) = W(t) \int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

SERIE DI FOURIER

Una funzione $f(x)$ e' sviluppabile in ΣF se:

- $f(x)$ e' periodica
- $f(x)$ e' limitata $\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < +\infty$

$$\Sigma F = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad \text{dove:}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int f(x)\, dx$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int f(x) \cos(mx)\, dx$$

$\Big\}$ se $f(x)$ e' dispari $\rightarrow a_0 = a_m = 0$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int f(x) \sin(mx)\, dx$$

$\Big)$ se $f(x)$ e' pari $\rightarrow b_m = 0$

TEOREMA di CONVERGENZA PUNTUALE

Hp_1: $f \in P_{2\pi}$, ΣF associata, $f(x)$ cont in x_0, $\exists\, f_+(x_0), f_-(x_0)$

Th_1: ΣF conv. puntualmente a f in x_0

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos(mx_0) + b_m \sin(mx_0)$$

Hp_2: $f \in P_{2\pi}$, ΣF associata, $f(x)$ cont in x_0, $\exists\, f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ e le loro pseudoderivate sono finite (ho una disc. 1ª specie)

Th_1: $\Sigma F_{|x_0}$ conv. puntualmente al valor medio $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

TEOREMA di CONVERGENZA UNIFORME

Hp: $f(x) \in P_{2\pi}$, ΣF associata, $f(x)$ cont

$f'(x)$ ha un n° finito di discontinuità di 1ª specie su $[a,b]$

Th: $f(x) = \Sigma F$ uniformemente su $[a,b]$

DEFINIZIONE di CONVERGENZA UNIFORME

$f_m(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente su T se:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, m_\varepsilon$ tc $\forall m > m_\varepsilon$: $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in T$

definito

$\Leftrightarrow \sup_T |f_m(x) - f(x)| \rightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$

estremo superiore di $T \rightarrow$ e' $|f_m(x) - f(x)|$

CONVERGENZA in L_1 e L_2

NORMA L_1 : $\overset{\text{distanza}}{d_1}(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$, $\|f\|_1 = d(f,0) = \int_a^b |f(x)|\,dx$

Def L_1 : $f_n(x) \to f(x) \iff \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0$

NORMA L_2 : $\overset{\text{distanza}}{d_2}(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx}$, $\|f(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} = d_2(f,0)$

Def L_2 : $f_n(x) \to f(x) \iff d_2(f_n(x), f(x)) \to 0$

$\equiv \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx} \to 0$

NB : $f_n(x) \xrightarrow{L_\infty} f(x) \Rightarrow f_n(x) \underset{\not\leftarrow}{\xrightarrow{L_1}} f(x) \Rightarrow f_n(x) \underset{\not\leftarrow}{\xrightarrow{L_2}} f(x)$

TEOREMA STABILITA' pti di EQUILIBRIO (1)

Hp : $\underline{y}' = A\underline{y}$, $(0,0)$ pto di equilibrio

Th : a) $Re\,\lambda_i < 0$, $\forall \lambda_i \in A$: $(0,0)$ e' asint. stabile

b) $Re\,\lambda_i \le 0$, $Re\,\lambda_j = 0 \to$ (λ_j e' REGOLARE) : $(0,0)$ e' STABILE

c) $\exists\, \lambda_j$ con $Re\,\lambda_j > 0$: $(0,0)$ e' INSTABILE

d) $Re\,\lambda_i > 0$, $\forall \lambda_i$: $(0,0)$ e' INSTABILE, ma asint. STABILE per $t \to -\infty$

TEOREMA STABILITA' pti di EQUILIBRIO (2)

Hp : $y' = Ay + b$, $Ay + b = 0$ ha soluz. $y = y_0$

Th : y_0 e' asint. STABILE / stabile / instabile se e solo se $(0,0)$ e' asint. STABILE / stabile / instabile per $\underbrace{z' = Az}_{\text{sistema linearizzato}}$

TEOREMA di LINEARIZZAZIONE

Hp : $\underbrace{y' = f(y)}_{\text{sist. autonomo non lineare}}$, $A = J(x_0, y_0)$, $\underbrace{z' = Az}_{\text{sist. autonomo omogeneo}}$ (sistema linearizzato)

Th: a) se $(0,0)$ e' asint. stabile per $z' = Az$

$\Rightarrow P_0$ e' asint. stabile per sistema di partenza $y' = f(y)$

b) se λ_i tc $\text{Re}\,\lambda_i > 0$: P_0 e' instabile

c) se $(0,0)$ e' sorgente (asint. stabile per $t \to -\infty$)

$\Rightarrow P_0$ e' sorgente per $y' = f(y)$

TEOREMA INTEGRALE PRIMO

Hp : $\ddot{x} = f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \geq C_0$

Th: $\forall x = \varphi(t)$ soluzione dell' eq. prolungabile in $(-\infty, +\infty)$

TEOREMA di REGOLARITA' per EQ. DIFFERENZIALE

Hp: $y' = f(t,y)$, f definita in $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^k(D)$

Th: ogni soluzione $y = y(t)$ e' tc $y \in C^{k+1}(I)$

METODO DI EULERO

Il metodo di Eulero si basa sull' idea geometrica che ogni soluzione di un' equazione differenziale deve "seguire" il campo delle direzioni.

Data un eq. differenziale di partenza $y' = f(t,y)$ e un pto $P_0(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ovvero appartenente al dominio della funzione f cerchiamo la soluzione al PC: $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Fissato un incremento (o passo) h per la variabile indip. t, osserviamo che la soluzione passante per (t_0, y_0) deve avere in tale pto una pendenza $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ e quindi possiamo approx il valore della soluzione in $t_1 = t_0 + h$

con $y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$;

Dopodiche si può continuare a iterare il procedimento avendo la seguente formula ricorsiva:

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)$$

dove y_k è il valore stimato della soluzione $t_k = t_0 + hk$

la spezzata poligonale che si ottiene congiungendo i pti (t_k, y_k) approssima la soluzione esatta e per il Th di Kamke è facile intuire che per $h \to 0$, le approssimanti tenderanno alle soluzioni uniformemente su I_δ

MODELLO di LOTKA-VOLTERRA

Il modello PREDA-PREDATORE di LOTKA-VOLTERRA è un sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - b\boxed{xy} \to x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

NON È POSSIBILE APPLICARE Th 3' in GRANDE perché non ho una crescita al più lineare rispetto a x' e y'

dove x e y sono rispettivamente il numero di PREDE e PREDATORI ed a,b,c,d sono costanti positive dipendenti dal tipo di popolazioni e ambiente considerato.

TEOREMA di KAMKE

Hp: $P.C._n \begin{cases} y' = f_n(t, y) \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$, $PC_{lim} \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{cases}$

$y = y_n(t)$ definita in $[a,b]$, $y = y(t)$ definita in $[a,b]$ soluzioni

a) $f_n, \frac{\partial f_n}{\partial t}, f, \frac{\partial f}{\partial t} \in C^0(D)$, $P_n(t_n, y_n)$ e $\bar{P}(\bar{t}, \bar{y})$ interni a D

b) $P_n \xrightarrow{\text{converge}} \bar{P}$ (dati iniziali convergono a $(\bar{x}, \bar{y})$)

c) $f_n(t,y) \xrightarrow{\text{converge}} f(t,y)$ uniformemente su D

Th: $y_n(t) \xrightarrow{\text{converge}} y(\bar{t})$ uniformemente su $I \to [a,b]$

Significa che se vengono soddisfatte le ipotesi del Th di esistenza e unicità locale, allora il PC è ben posto, e la dipendenza continua va letta nel senso della convergenza uniforme

TEOREMA di STRUTTURA di un SISTEMA LINEARE OMOGENEO

Hp: $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}$, $A(t) \in C^0(I)$, $y_1(t), \dots y_n(t)$ soluz. indip.

Th: $\underline{y}(t) = \underbrace{\sum c_i \cdot y^i(t)}_{\text{combinazione lineare di soluzioni}}$

TEOREMA di STRUTTURA di un SISTEMA LINEARE COMPLETO

Hp: $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y} + b(t)$, $A(t), b(t) \in C^0(I)$ e $\underline{z}' = A(t)\underline{z}$ (sist. lin omog assoc)

Th: $y(t) = \sum c_i y^i(t) + y_p(t) = W(t) \cdot \underline{c} + y_p(t)$

SISTEMI A 1 GRADO DI LIBERTÀ

Sono sistemi conservativi che definiscono campi di forza posizionali

$$\ddot{x} = f(x) \to \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \quad \text{FORMA CANONICA}$$

- INTEGRALE PRIMO : $E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \int f(x)\, dx$
- ENERGIA MECCANICA : si conserva : $U(x) = -\int f(x)\, dx$

Le soluz. sono prolungabili a tutto $\mathbb{R}$ se $E(x,y) \geq 0$ e

$U(x)$ e' inferiormente limitata (rispetto Th ∃! in grande)

RELAZIONI DINAMICHE e PASSAGGIO IN POLARE

le relazioni dinamiche sono le seguenti:

$$\begin{cases} \rho \cdot \rho' = x\dot{x} + y\dot{y} \\ \rho^2 \dot{\vartheta} = x\dot{y} + \dot{x}y \end{cases}$$

Passo alle coordinate polari cosicché posso studiare cicli con orbite chiuse

e risolvere il problema del caso dubbio (CENTRO)

STABILITA' di LIAPUNOV

$y' = f(y)$, $y = P$ → pto di equilibrio, $y = \varphi(t)$ soluz. di $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = q \end{cases}$

Diremo che P e' pto di eq STABILE se:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad t_c \quad |q - P| < \delta$

$y_0 \to y$ valutato in 0

soluz di $y' = f(y)$

$\Rightarrow$ a) $\varphi(t)$ e' DEFINITA in $[0, +\infty]$

b) $|\varphi(t) - P| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, +\infty]$

c) $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = P$

Diremo che P e' pto di eq asint. stabile se:

$\Omega = \left\{ q \,\middle|\, \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = P \right\} \Rightarrow$ BACINO di ATTRAZIONE

insieme delle soluz. di $y' = f(y)$

FORMULA DI PARSEVAL

la formula di Parseval stabilisce che la somma dei quadrati dei

coefficienti della serie di Fourier di una funzione e' uguale alla all' integrale del quadrato della funzione

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

TEOREMA ESISTENZA e UNICITA' in PICCOLO per Sistemi lineari

Hp: p.c. $\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$ $\qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$$\underline{f}(t, \underline{y}) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\ \dots \\ f_m(t, y_1, \dots, y_m) \end{bmatrix}, \quad \underline{f}: D \in R^{m+1} \to R^m$$

1) $P_0(t_0, y_0, \dots, y_{m0})$ interno a D

2) $\underline{f} \in C^0(D) \iff f_i(t, y_i, \dots y_{im}) \in C^0(D) \quad \forall i$

3) matrice Jacobiana $\dfrac{\partial \underline{f}(t, \underline{y})}{\partial \underline{y}} \in C^0(D)$

Th: $\exists$ unica la soluzione $\underline{y} = \underline{y}(t)$ in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

TEOREMA ESISTENZA e UNICITA' in GRANDE per SISTEMI LINEARI

Hp: pc $\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$, $\quad \underline{f}: \underbrace{S}_{[\alpha, \beta] \times R^m} \subseteq R^{m+1} \to R^m, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} \in R^m,$

pto. $P_0(t_0, y_0)$ in S.

a) $\underline{f}(t, y)$ e' continua in S

b) $\underline{f}_y = \left[\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} \right]$ matrice Jacobiana continua in S

c) $\underline{f}_y$ limitata in S

Th: $\exists$ una sola soluz. $\underline{y} = \underline{y}(t)$ prolungabile in tutto $[\alpha, \beta]$