GEOMETRIA EUCLIDEA

(Cfr. J. Stillwell, *Da Pitagora a Turing*, cap. 1 e § 7.4)

ELEMENTI

Euclide (*c.* 300 a.C.)

I-IV - geometria piana

V - teoria delle proporzioni

VI - applicazioni alla geometria piana

VII-IX - teoria dei numeri

X - “irrazionalità quadratiche”

XI-XIII - geometria solida

23 Definizioni

I	Punto è ciò che *non ha parti*
II	Linea è *lunghezza* senza larghezza
III	Estremi di una linea sono punti
VI	Linea retta è quella che *giace ugualmente rispetto ai suoi punti*
V	Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza *e* larghezza
VI	Estremi di una superficie sono linee
…	

Risulti Postulato:

I che si possa condurre una **linea** retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto

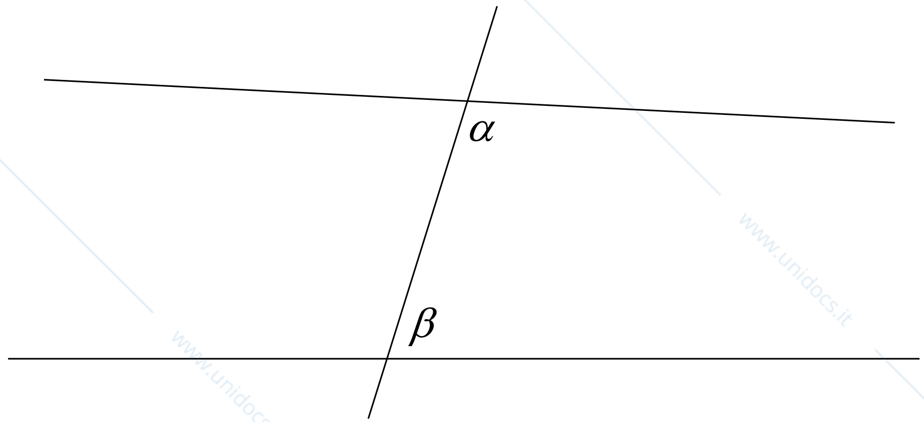
II che una retta finita si possa **prolungare continuamente** in linea retta

III che si possa descrivere un **cerchio** con qualsiasi centro ed ogni distanza

IV che tutti gli **angoli retti** siano uguali tra loro

V che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui la somma degli angoli è minore di due retti

ASSIOMA DELLE PARALLELE



se una linea retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Nozioni comuni

principi logici

I cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche tra loro

II se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali

III se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali

IV cose che coincidono tra loro sono tra loro uguali

V il tutto è maggiore della parte

FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

Hilbert (1899)

5 gruppi di assiomi

Spiegazione. Sono considerati tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo *punti* gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con $A, B, C,..$; chiamiamo *rette* gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con $a, b, c,\ldots$; chiamiamo *piani* gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$

I	Assiomi di *collegamento*
II	Assiomi di *ordinamento*
III	Assiomi di *congruenza*
IV	Assioma di *intersezione dei cerchi*
V	Assiomi di *continuità*

Assiomi di COLLEGAMENTO

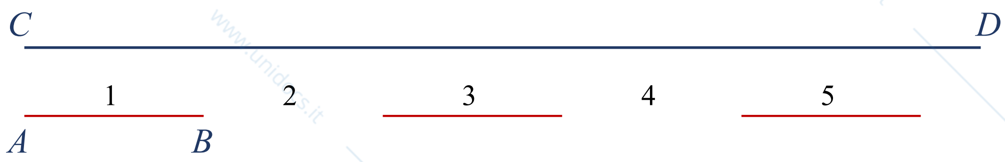
1. Per due punti A e B c'è sempre una retta a che appartiene a entrambi i punti.
2. Per due punti A e B c'è al massimo una retta a che appartiene a entrambi i punti.
3. Su una retta ci sono almeno 2 punti. Esistono 3 punti che non giacciono su una retta.
4. Per un punto P che non appartiene alla retta l, c'è esattamente una linea m che passa per P e non incontra l.

Assiomi di CONTINUITÀ

1. Archimedeo (*della misura*). Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero n tale che il trasporto del segmento AB reiterato n volte, a partire da C, sulla semiretta passante per D, porta al di là di D.

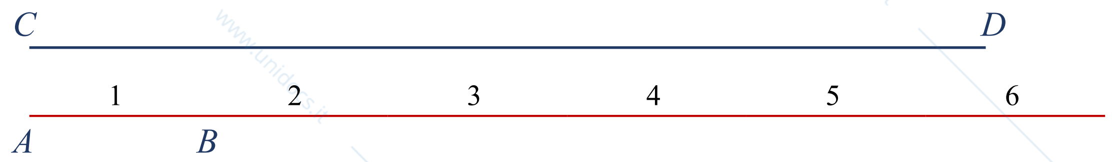
Assiomi di CONTINUITÀ

1. Archimedeo (*della misura*). Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero n tale che il trasporto del segmento AB reiterato n volte, a partire da C, sulla semiretta passante per D, porta al di là di D.



Assiomi di CONTINUITÀ

1. Archimedeo (*della misura*). Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero n tale che il trasporto del segmento AB reiterato n volte, a partire da C, sulla semiretta passante per D, porta al di là di D.



$n = 6$

Assiomi di CONTINUITÀ

2. *Completezza lineare*. Se i punti di una linea l sono divisi in due sottoinsiemi non vuoti $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ tali che nessun punto di $\boldsymbol{A}$ giace tra due punti di $\boldsymbol{B}$ e nessun punto di $\boldsymbol{B}$ giace tra due punti di $\boldsymbol{A}$, allora c'è un unico punto P, o in $\boldsymbol{A}$ o in $\boldsymbol{B}$, che giace tra due punti, uno dei quali è in $\boldsymbol{A}$ e l'altro in $\boldsymbol{B}$.

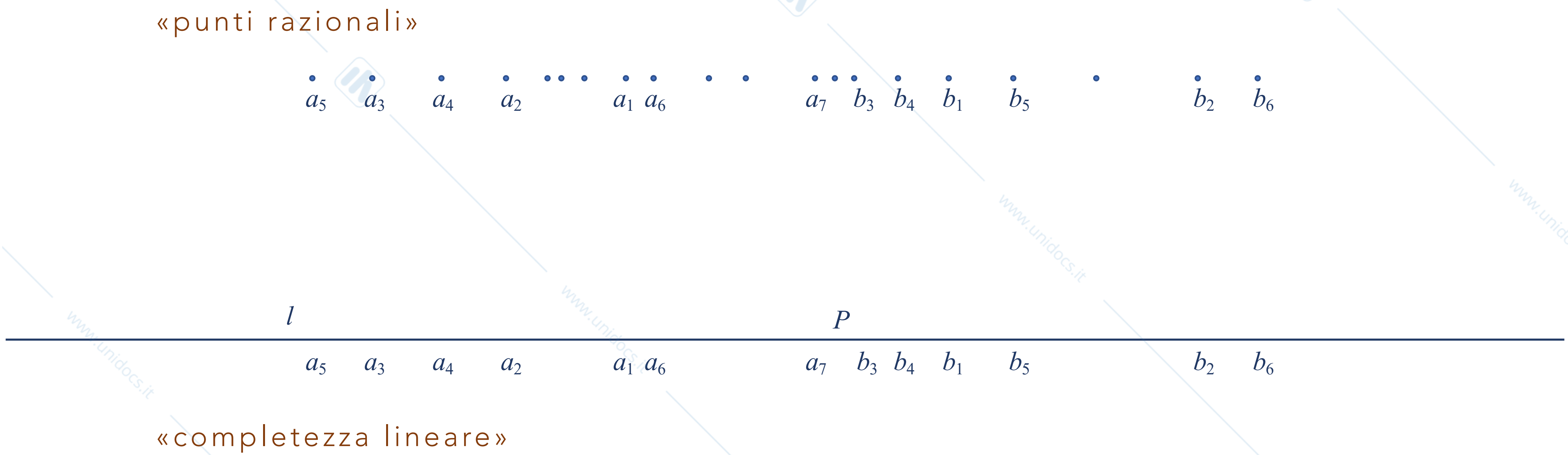
l

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Assiomi di CONTINUITÀ

2. *Completezza lineare*. Se i punti di una linea l sono divisi in due sottoinsiemi non vuoti $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ tali che nessun punto di $\boldsymbol{A}$ giace tra due punti di $\boldsymbol{B}$ e nessun punto di $\boldsymbol{B}$ giace tra due punti di $\boldsymbol{A}$, allora c'è un unico punto P, o in $\boldsymbol{A}$ o in $\boldsymbol{B}$, che giace tra due punti, uno dei quali è in $\boldsymbol{A}$ e l'altro in $\boldsymbol{B}$.

«completezza lineare»


«punti razionali»
a_5 a_3 a_4 a_2 a_1 a_6 a_7 b_3 b_4 b_1 b_5 b_2 b_6
l
P
a_5 a_3 a_4 a_2 a_1 a_6 a_7 b_3 b_4 b_1 b_5 b_2 b_6
«completezza lineare»

Assiomi di CONTINUITÀ

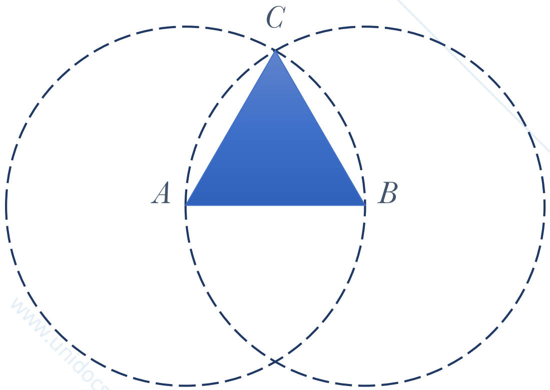
1. Archimedeo (*della misura*). Se *AB* e *CD* sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero *n* tale che il trasporto del segmento *AB* reiterato *n* volte, a partire da *C,* sulla semiretta passante per *D,* porta al di là di *D*.

2. *Completezza lineare*. Se i punti di una linea *l* sono divisi in due sottoinsiemi non vuoti ***A*** e ***B*** tali che nessun punto di ***A*** giace tra due punti di ***B*** e nessun punto di ***B*** giace tra due punti di ***A***, allora c'è un unico punto *P*, o in ***A*** o in ***B***, che giace tra due punti, uno dei quali è in ***A*** e l'altro in ***B***.

COSTRUZIONI EUCLIDEE (*Elementi*, Libro I)

Proposizione 1

Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.

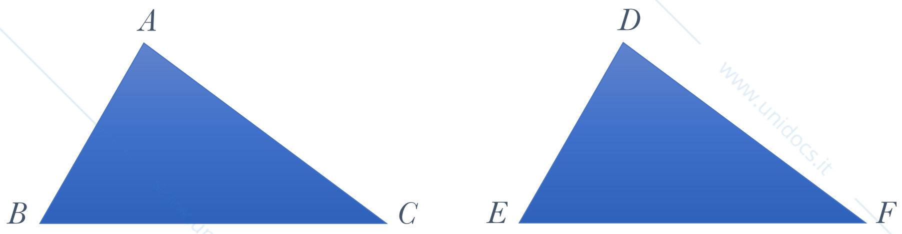


… e **dal punto *C***, in cui i cerchi si tagliano tra loro, risultano tracciate ai punti *A, B*, le rette congiungenti *CA, CB*. […]

Congruenza Euclidea

Libro I: Proposizione IV

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, i due triangoli saranno uguali, e gli angoli rimanenti opposti ai lati uguali saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [*LAL*].

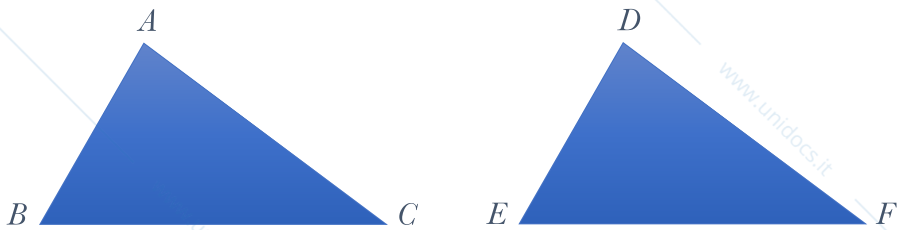


[Siano *ABC, DEF* due triangoli con lati *AB=DE, AC=DF* e angoli *BAC=EDF*]

Congruenza Euclidea

Libro I: Proposizione IV

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, i due triangoli saranno uguali, e gli angoli rimanenti opposti ai lati uguali saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [*LAL*].



[Siano *ABC, DEF* due triangoli con lati *AB*=*DE, AC*=*DF* e angoli *BAC*=*EDF*]

se il triangolo *ABC* è *sovrapposto* al triangolo *DEF,* il punto *A* viene a coincidere con il punto *D,* la retta *AB* con la retta *DE*, anche il punto *B* verrà a coincidere col punto *E* essendo *AB*=*DE*, …