

**Finanza Aziendale (asset pricing e  
finanziamento delle imprese)**

Facoltà di Economia

Anno Accademico 2020/21



UNIVERSITÀ  
CATTOLICA  
del Sacro Cuore

## Sezione 1.1

# Modelli rischio-rendimento e analisi media-varianza

Prof. Andrea Signori



- (1) L'utilità attesa della ricchezza e l'attitudine degli investitori verso il rischio
- (2) Il principio media-varianza e le condizioni per la sua validità
- (3) Diversificazione di portafoglio
- (4) Il CAPM e suoi approfondimenti



UNIVERSITÀ  
CATTOLICA  
del Sacro Cuore

## L'utilità attesa della ricchezza e l'attitudine degli investitori verso il rischio



L'**utilità della ricchezza**  $U(W)$  permette di attribuire una e una sola misura di utilità a ciascun livello di ricchezza.

Assunzioni:

- Il comportamento degli individui è dettato dall'obiettivo di massimizzare l'utilità derivante dalla loro ricchezza
- *Assioma di non-sazietà*: l'utilità marginale della ricchezza è sempre positiva

$$\frac{dU(W_x)}{dW_x} > 0$$



# Scelte in condizioni di incertezza: l'utilità attesa

In condizioni di incertezza (non conoscenza del futuro) gli individui:

- Identificano ex ante gli **scenari** che potranno manifestarsi in futuro
- Associano a ciascuno di essi un grado di **probabilità**

Il criterio di **massimizzazione dell'utilità** puro e semplice non è sufficiente: a ogni scelta non è associata una singola misura di utilità, ma diverse misure con rispettive probabilità

- L'investitore sceglierà allora l'alternativa che massimizza la media delle utilità di fine periodo, cioè l'**utilità attesa**



# Ricchezza attesa e utilità attesa della ricchezza

**Ricchezza attesa:** valore atteso della variabile casuale ricchezza

$$E(W) = \sum_{j=1}^n p_j W_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

**Utilità attesa della ricchezza:** valore atteso dell'utilità associata alla ricchezza di ciascuno scenario

$$E[U(W)] = \sum_{j=1}^n p_j U(W_j)$$

In condizioni di incertezza, l'individuo **massimizzerà l'utilità attesa** (non la ricchezza attesa).



## Esempio

Investimento Gamma	$W_j$	1100	1300	1400
	$P_j$	20%	70%	10%
Investimento Delta	$W_j$	900	1350	1500
	$P_j$	20%	70%	10%

Calcoliamo la **ricchezza attesa**  $E(W)$ :

$$\text{Gamma} \quad 0.2 * 1100 + 0.7 * 1300 + 0.1 * 1400 = 1270$$

$$\text{Delta} \quad 0.2 * 900 + 0.7 * 1350 + 0.1 * 1500 = 1275$$



## Esempio: utilità attesa della ricchezza

Per calcolare l'utilità attesa della ricchezza  $E[U(W)]$ , dobbiamo conoscere la **funzione di utilità** del soggetto. Ipotizziamo che sia la seguente:

$$U(W) = W^{1/2}$$

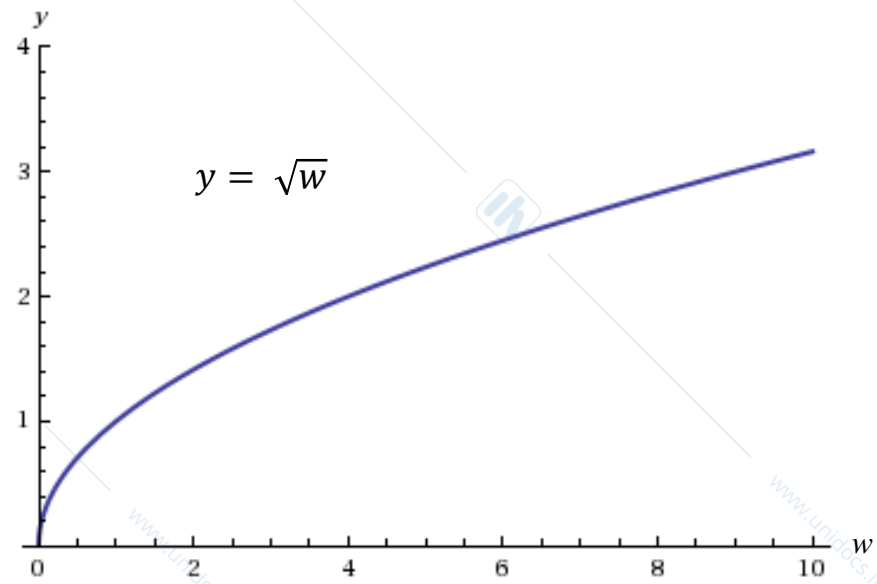
Calcoliamo ora l'utilità attesa della ricchezza  $E[U(W)]$ :

$$\text{Gamma} \quad 0.2 * 1100^{1/2} + 0.7 * 1300^{1/2} + 0.1 * 1400^{1/2} = 35.62$$

$$\text{Delta} \quad 0.2 * 900^{1/2} + 0.7 * 1350^{1/2} + 0.1 * 1500^{1/2} = 35.59$$

In termini di ricchezza attesa  $E(W)$ :  $\text{Delta} > \text{Gamma}$

In termini di utilità attesa della ricchezza  $E[U(W)]$ :  $\text{Gamma} > \text{Delta}$



Funzione di utilità:

- Strettamente **crescente** (non-sazietà):  
 $U'(W) > 0$
- Concava: gli incrementi di utilità al crescere della ricchezza sono **decrementi**:  
 $U''(W) < 0$



Utilità della ricchezza attesa  $U[E(W)]$ :

Gamma:  $1270^{1/2} = 35.64$  ; Delta:  $1275^{1/2} = 35.71$

		Gamma		Delta
Ricchezza attesa	$E(W)$	1270	<	1275
Utilità della ricchezza attesa	$U[E(W)]$	35.64	<	35.71
Utilità attesa della ricchezza	$E[U(W)]$	35.62	>	35.59

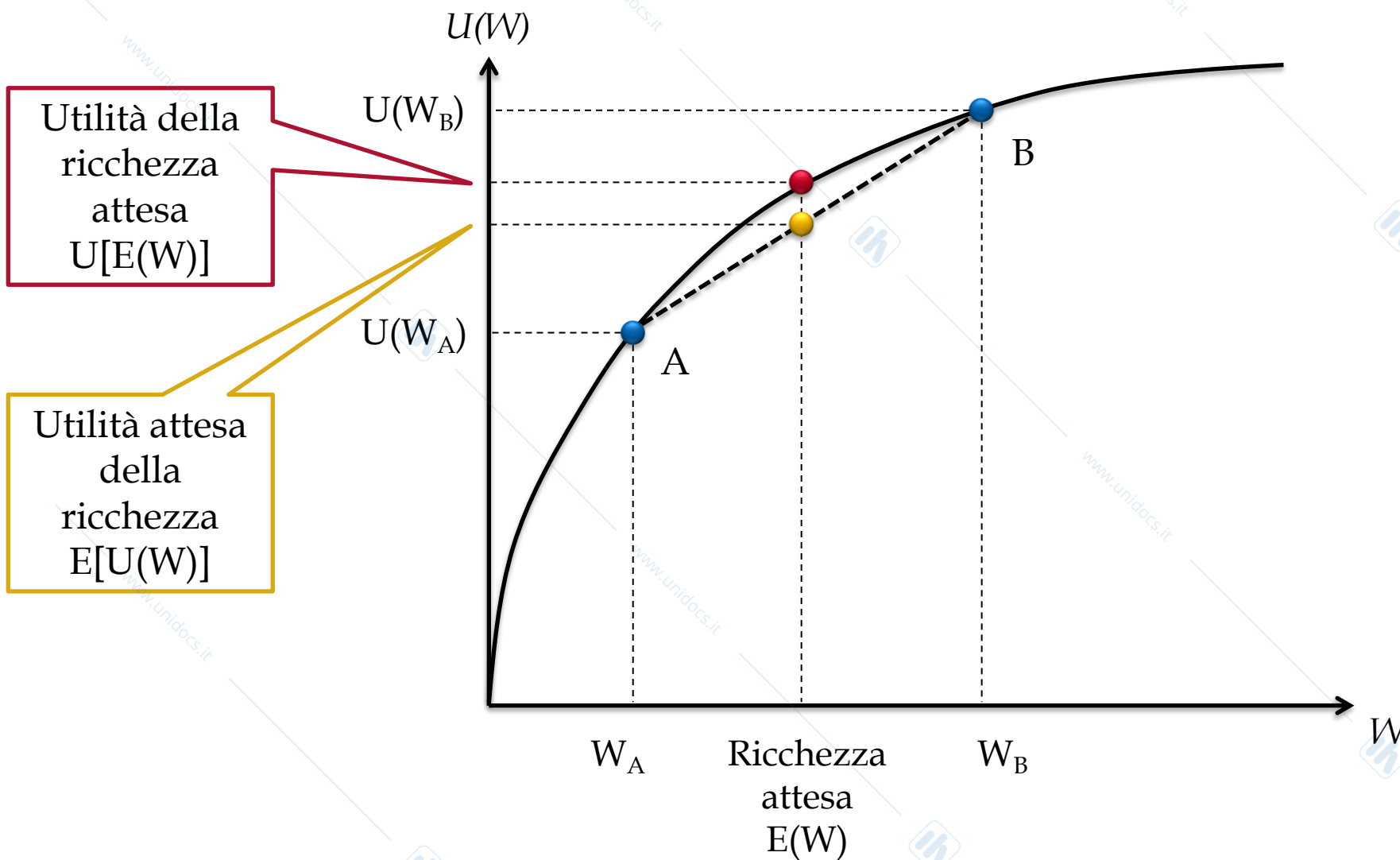
In entrambi i casi:  $U[E(W)] > E[U(W)]$

Investitori con funzioni di utilità **concave** preferiranno sempre un investimento con un livello di ricchezza certo a un investimento con lo stesso livello «incerto» (dato dalla ricchezza attesa di due scenari).

→ Investitori con funzioni di utilità concave si dicono **avversi al rischio**

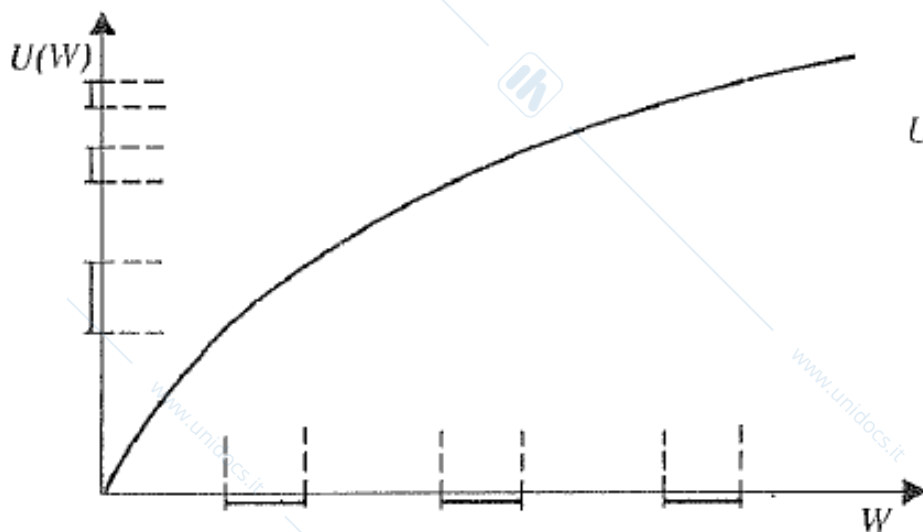


# Utilità attesa della ricchezza e utilità della ricchezza attesa

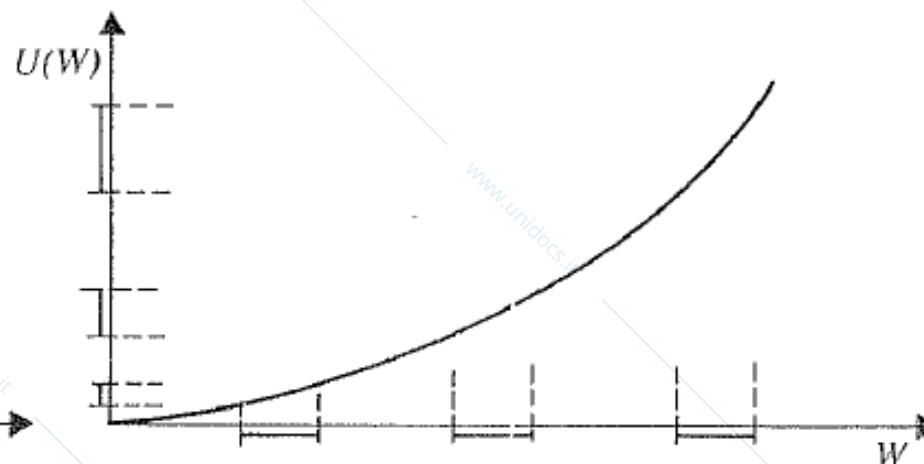




Funzione di utilità concava  
(utilità marginale decrescente)



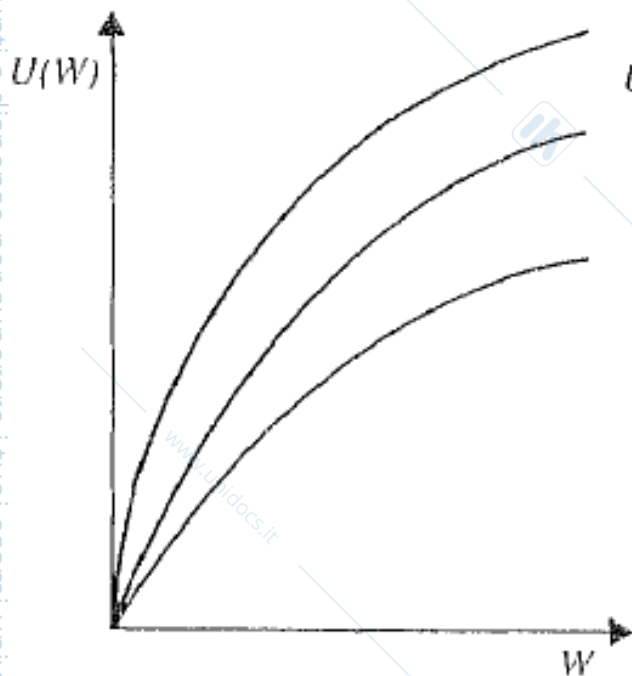
Funzione di utilità convessa  
(utilità marginale crescente)



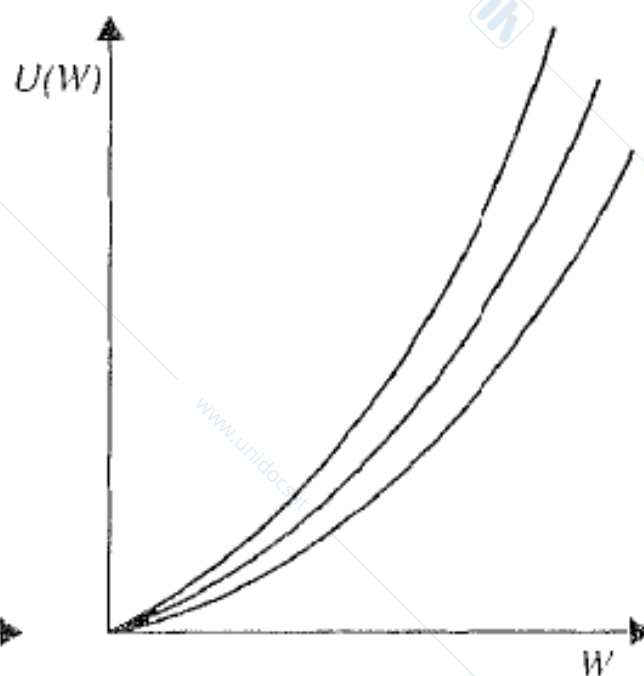


# Avversione, propensione, neutralità al rischio

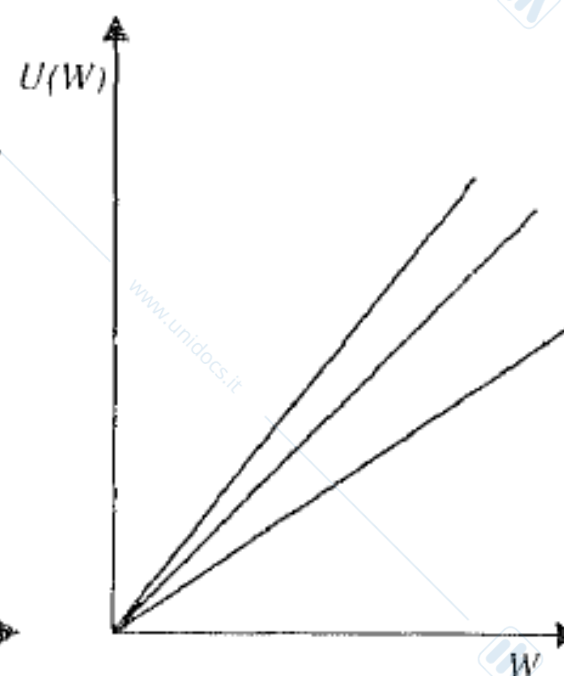
**Concava**  
Avversione al rischio



**Convessa**  
Propensione al rischio

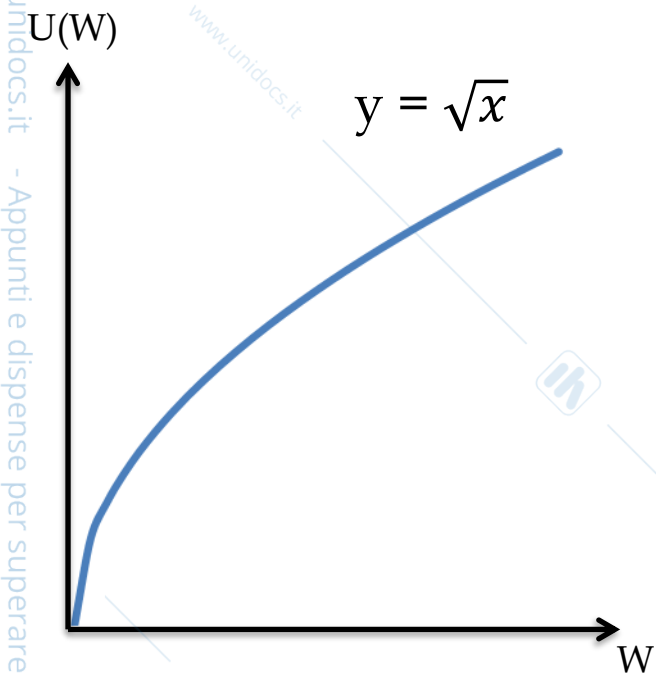


**Lineare**  
Indifferenza al rischio





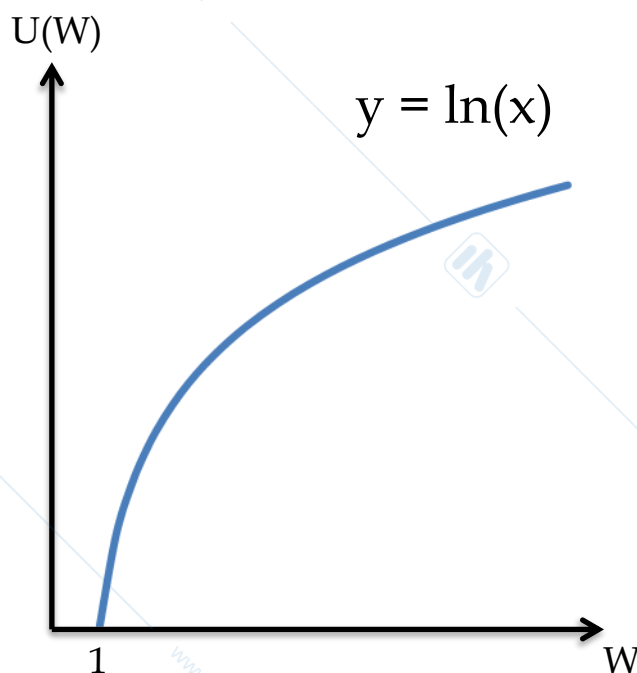
# Esempi di funzioni di utilità



$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} > 0$$

$$y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2} < 0$$

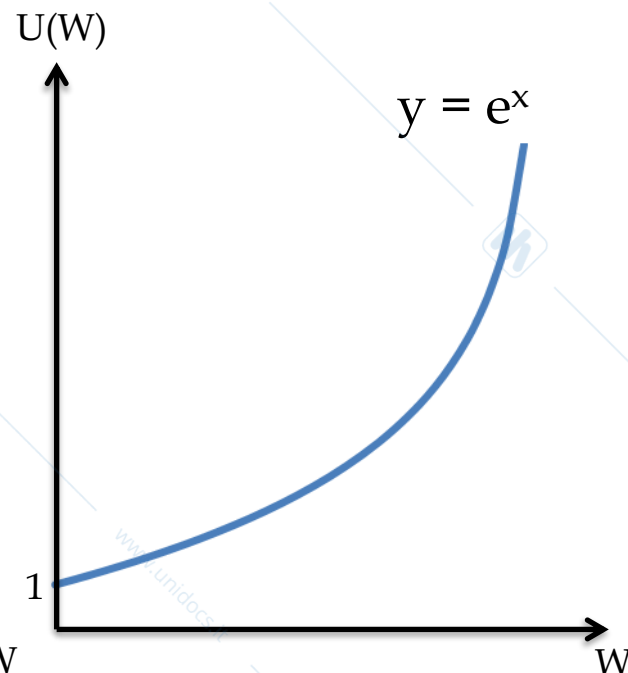
Avverso al rischio



$$y' = \frac{1}{x} > 0$$

$$y'' = -x^{-2} < 0$$

Avverso al rischio



$$y' = e^x > 0$$

$$y'' = e^x > 0$$

Propenso al rischio



- **Rendimento di un investimento:**

$$R = \frac{W_{t+1}}{W_t} - 1$$

- **Rendimento atteso (o medio) in situazione di incertezza:**

$$E(R) = \sum_{j=1}^n p_j R_j$$

- **Varianza ( $\sigma^2$ ) e scarto quadratico medio ( $\sigma$ ):**

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^n p_j [R_j - E(R)]^2; \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$



In termini di rendimento (ricchezza iniziale = 1000):

## Gamma

$R_j$	10%	30%	40%
$p_j$	0.2	0.7	0.1

$$E(R) = 27\%$$

$$\sigma^2 = (10-27)^2 * 0.2 + (30-27)^2 * 0.7 + (40-27)^2 * 0.1 = 81$$

$$\sigma = 9\%$$

## Delta

$R_j$	-10%	35%	50%
$p_j$	0.2	0.7	0.1

$$E(R) = 27.5\%$$

$$\sigma^2 = (-10-27.5)^2 * 0.2 + (35-27.5)^2 * 0.7 + (50-27.5)^2 * 0.1 = 371.25$$

$$\sigma = 19.27\%$$

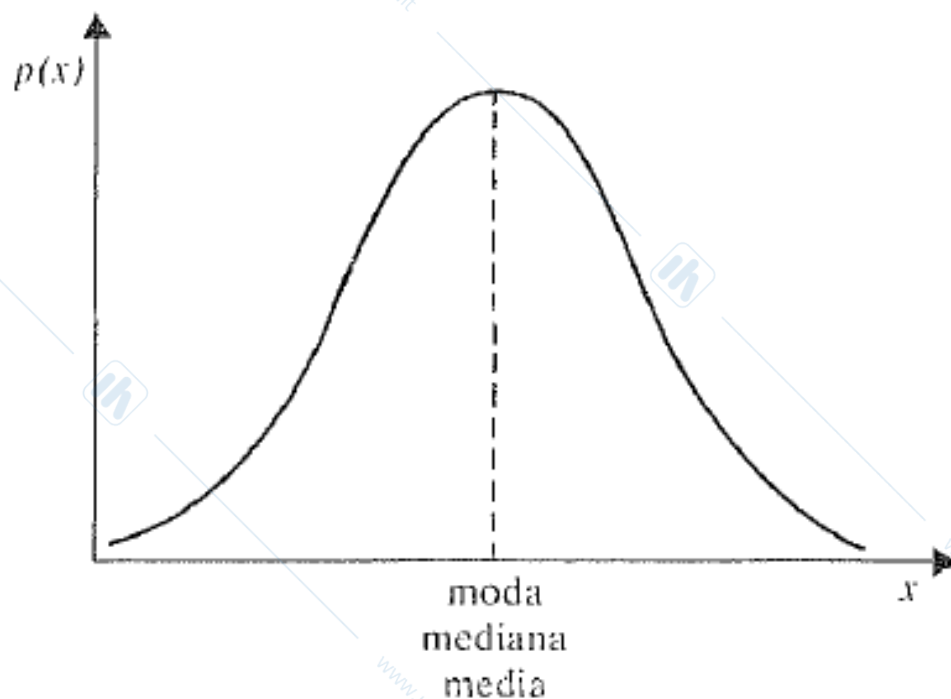
- Gli indicatori di dispersione (rischio) dei due investimenti sono coerenti con la precedente scelta dell'investitore avverso al rischio: Gamma, pur avendo rendimento atteso inferiore, è preferito da tale investitore



## Utilità attesa

Supponete che il Signor Verdi abbia una funzione di utilità logaritmica così definita  $U(W) = \ln(W)$ . Egli possiede una ricchezza iniziale di 1000 euro. Supponete che il signor Verdi abbia la possibilità di scommettere la sua ricchezza giocando ai dadi. In particolare, la scommessa prevede la possibilità di lanciare (una volta) un dado a sei facce, numerate da 1 a 6. Nel caso in cui escano numeri dispari il signor Verdi vincerà 50 Euro, nel caso in cui il dado si fermi sul 2 o sul 4 egli vincerà 400 euro, ed infine, nel caso in cui il dado si fermi sul numero 6 egli perderà 900 euro.

- Quale è il valore atteso della scommessa?
- Quale è l'utilità attesa proveniente dalla scommessa per il signor Verdi?
- Effettuerà il signor Verdi la scommessa?
- Siete in grado di dire cosa farebbe il signor Verdi se fosse un soggetto indifferente al rischio ?

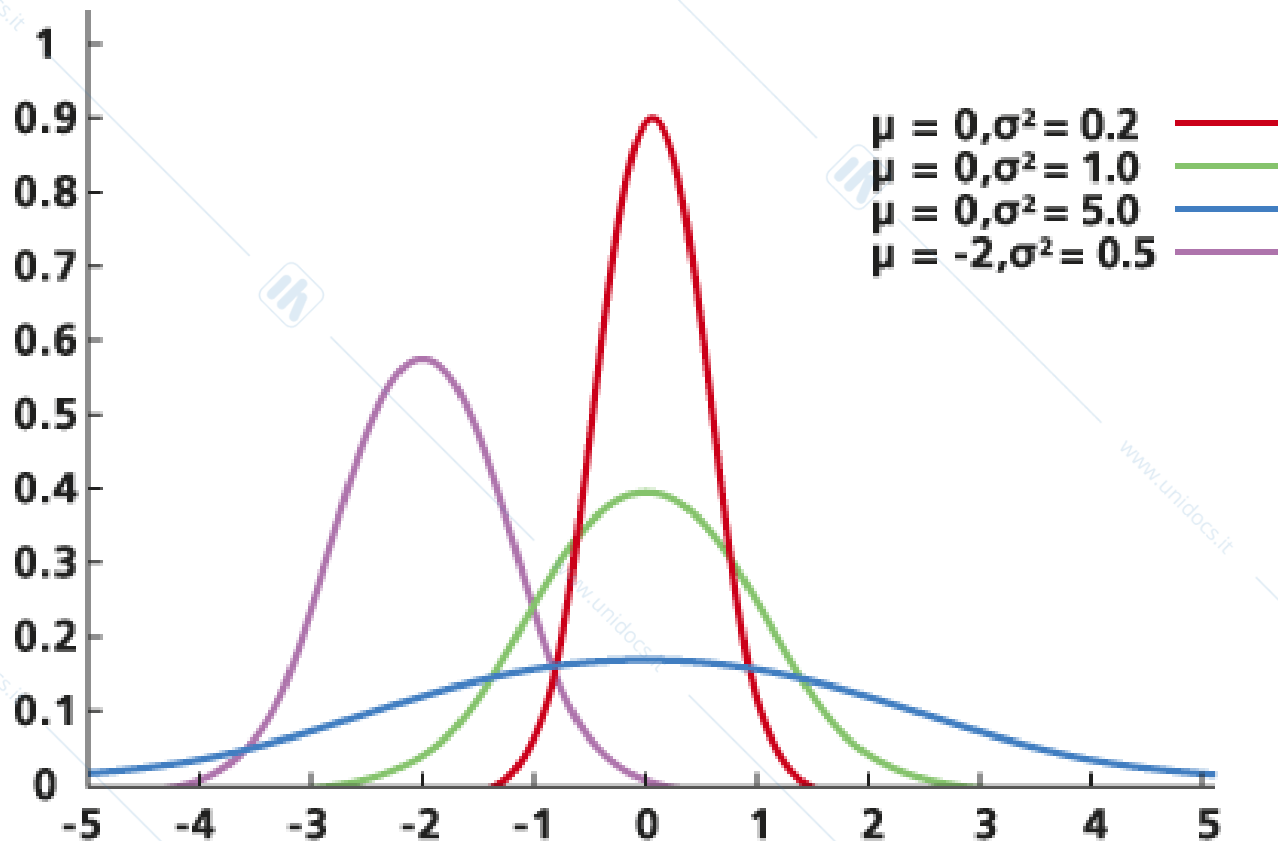


## Variabile casuale «normale»

- Simmetrica
- Media = mediana (valore per cui aree sottese a destra e sinistra sono di pari superficie) = moda (valore con  $p$  massima)

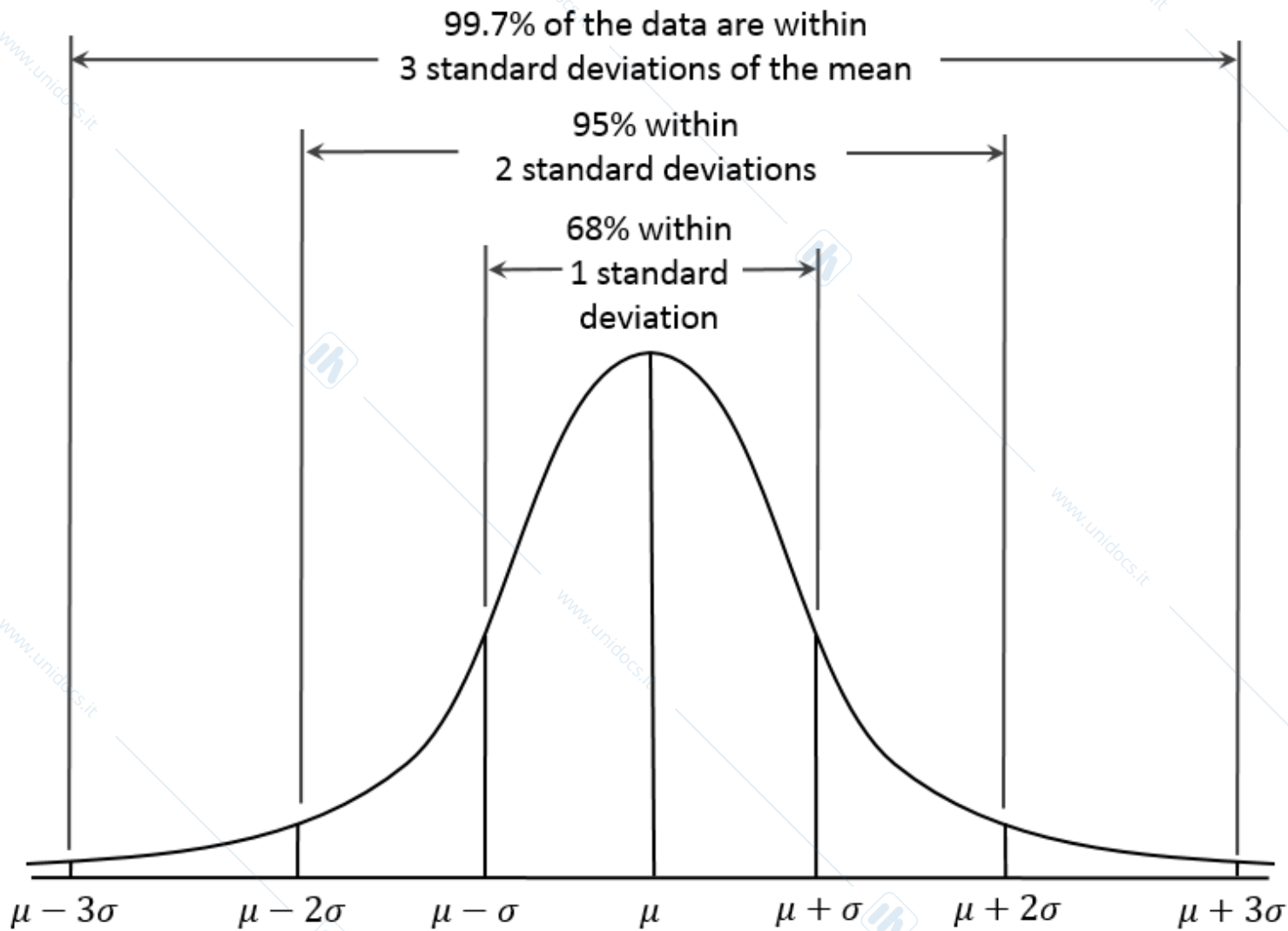


# Esempi di distribuzioni normali





# Intervalli canonici di una normale





## Distribuzione normale e uso della tavola di probabilità [1.2]

Dato un titolo azionario con distribuzione di probabilità dei rendimenti annui normale, in cui il rendimento atteso è pari al 5% e lo scarto quadratico medio è pari al 20%, calcolare la probabilità di ottenere in un anno un rendimento:

- 1) compreso tra -4% e 5%
- 2) superiore al 40%
- 3) compreso tra -36% e -5%
- 4) compreso tra 20% e 35%
- 5) compreso tra 5% e 25%
- 6) compreso tra -3% e 30%
- 7) inferiore a -30%



UNIVERSITÀ  
CATTOLICA  
del Sacro Cuore

## Il principio media-varianza e le condizioni per la sua validità



Assumendo che:

- 1) I rendimenti di un investimento si distribuiscano secondo una normale
- 2) L'investitore sia avverso al rischio
- 3) L'investitore massimizzi l'utilità attesa della ricchezza di fine periodo

vale il **principio della media-varianza**: l'investitore considera unicamente due parametri nella scelta tra diverse alternative di investimento

- A. Il rendimento atteso (o **media** dei rendimenti)
- B. La **varianza** dei rendimenti

Egli massimizza l'utilità attesa scegliendo l'alternativa di investimento che

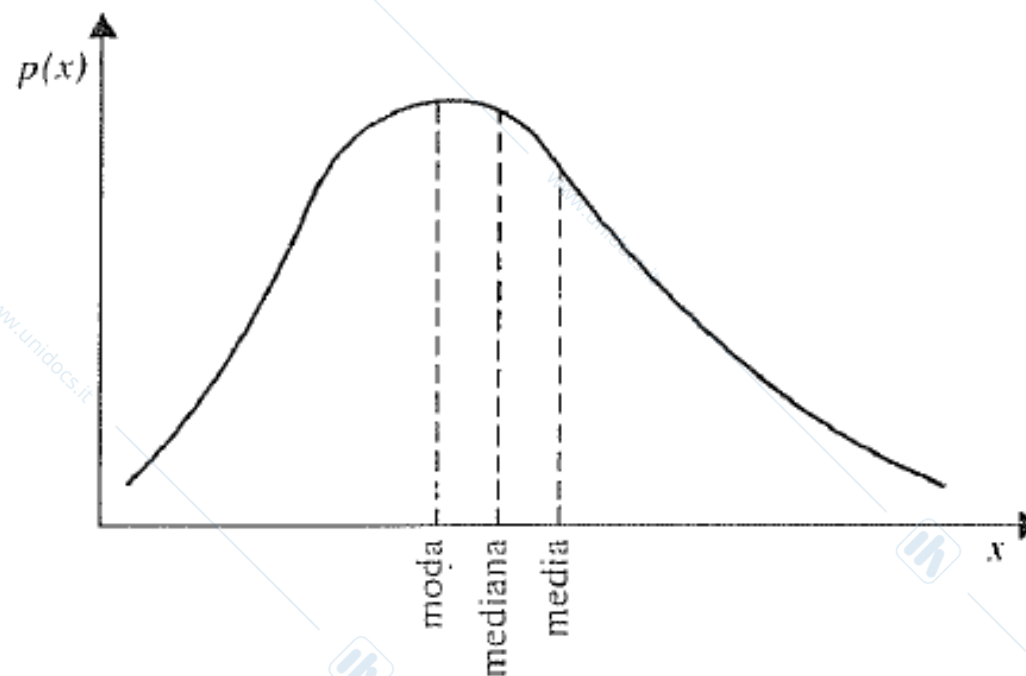
- **A parità di rendimento atteso**, è caratterizzata da **varianza minore**, oppure
- **A parità di varianza**, è caratterizzata da **rendimento maggiore**



Differenze rispetto alla distribuzione normale si possono verificare in termini di:

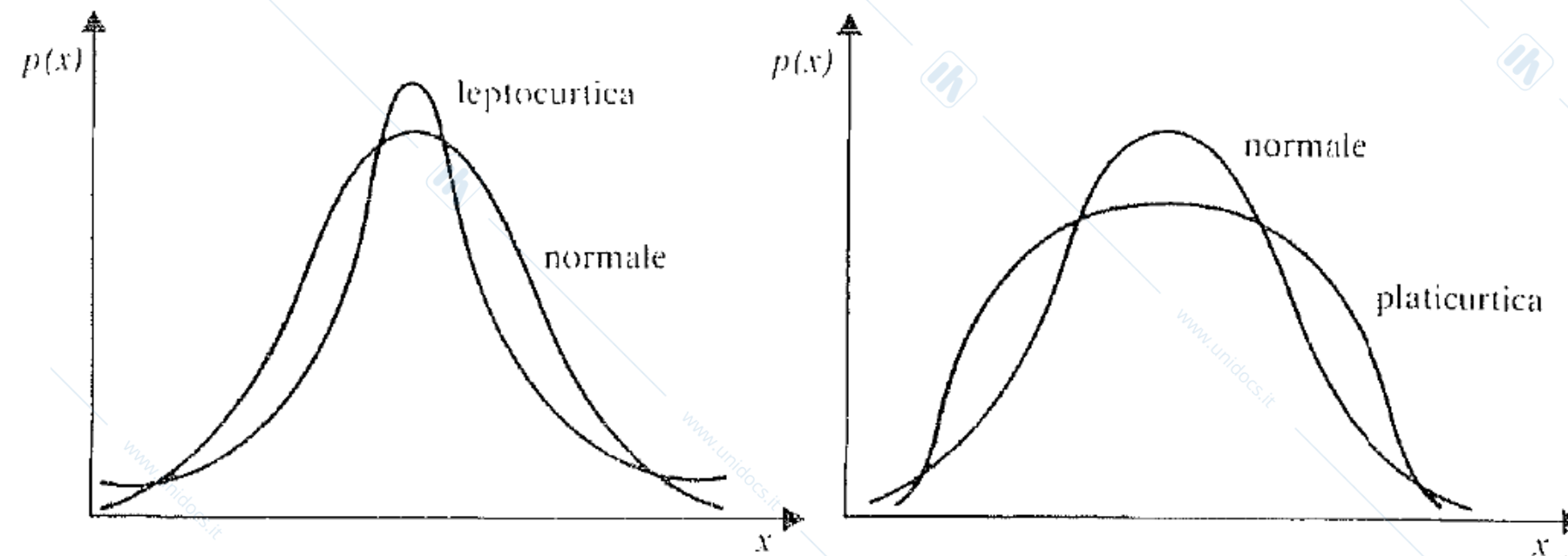
- Asimmetria
- Curtosi

**Asimmetria:** si verifica quando scostamenti dalla media di pari entità ma di segno opposto hanno probabilità diverse





**Curiosi:** la distribuzione di probabilità dei valori attorno alla media è diversa rispetto alla normale («spessore delle code»)





Rendimento mensile di un titolo azionario:

$$\begin{aligned}(1+r_{\text{mese}}) &= (1+\tilde{r}_{\text{sett1}}) (1+\tilde{r}_{\text{sett2}}) (1+\tilde{r}_{\text{sett3}}) (1+\tilde{r}_{\text{sett4}}) \\ &= \prod_{t=1}^{30} (1+\tilde{r}_{\text{giorno},t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+r_{\text{mese}}) &= \ln(1+\tilde{r}_{\text{sett1}}) + \ln(1+\tilde{r}_{\text{sett2}}) + \dots + \ln(1+\tilde{r}_{\text{sett4}}) \\ &= \sum_{t=1}^{30} \ln(1+\tilde{r}_{\text{giorno},t})\end{aligned}$$

Generalizzando (periodo T composto da  $n$  sottoperiodi  $t$ ):

$$\begin{aligned}(1+r_T) &= \prod_{t=1}^n (1+\tilde{r}_t) \\ \ln(1+r_T) &= \sum_{t=1}^n \ln(1+\tilde{r}_t)\end{aligned}$$



- Per intervalli di tempo brevi, il rendimento logaritmico è approssimativamente pari al rendimento di periodo
- La forma logaritmica permette di esprimere il rendimento di un periodo come la somma delle variabili casuali dei rendimenti di ciascun sottoperiodo
- **Teorema del limite centrale:** la distribuzione di una variabile casuale data dalla somma di risultati estratti da altre variabili casuali i.i.d., anche non normali, si approssima alla normale al crescere degli addendi

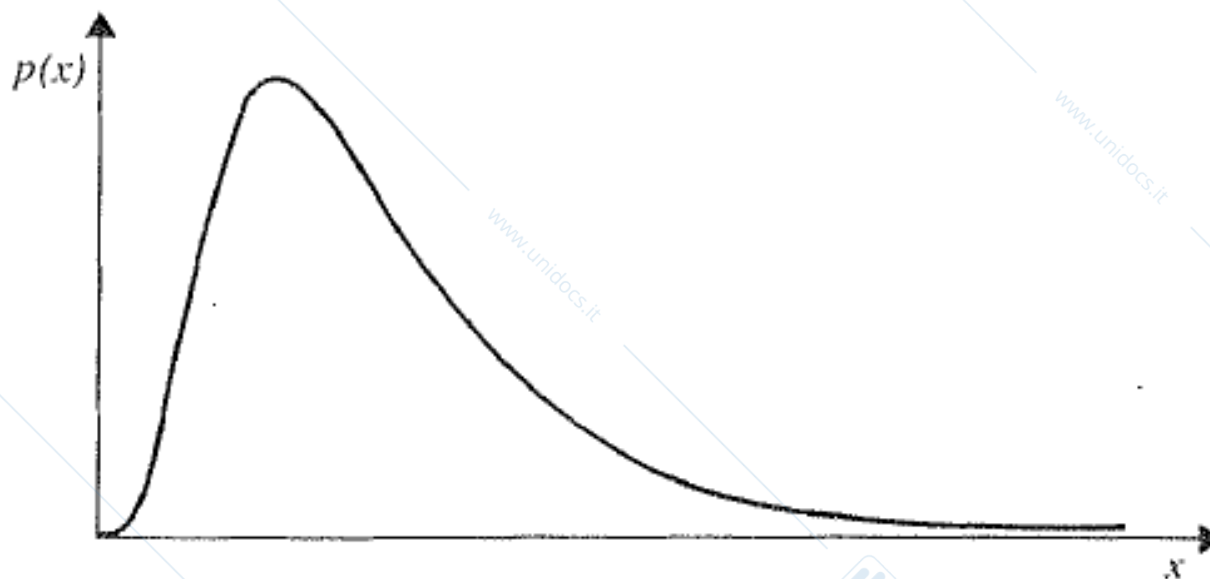
$$(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \dots + \tilde{x}_n) \text{ tende alla normale per } n \rightarrow \infty$$

- Se la distribuzione dei rendimenti dei sottoperiodi è stazionaria, la distribuzione dei rendimenti logaritmici di periodo  $\ln(1+r_T)$  tenderà alla normale



# Distribuzione lognormale dei rendimenti

- Se  $\ln(1+r_T)$  segue una distribuzione normale, allora  $r_T$  segue una distribuzione **lognormale**, che ne è una buona approssimazione
- Lognormale: distribuzione di dati che, se trasformati in logaritmi, si distribuiscono secondo una normale





Verifiche empiriche mostrano, tuttavia, che i rendimenti presentano distribuzioni con caratteristiche di non normalità:

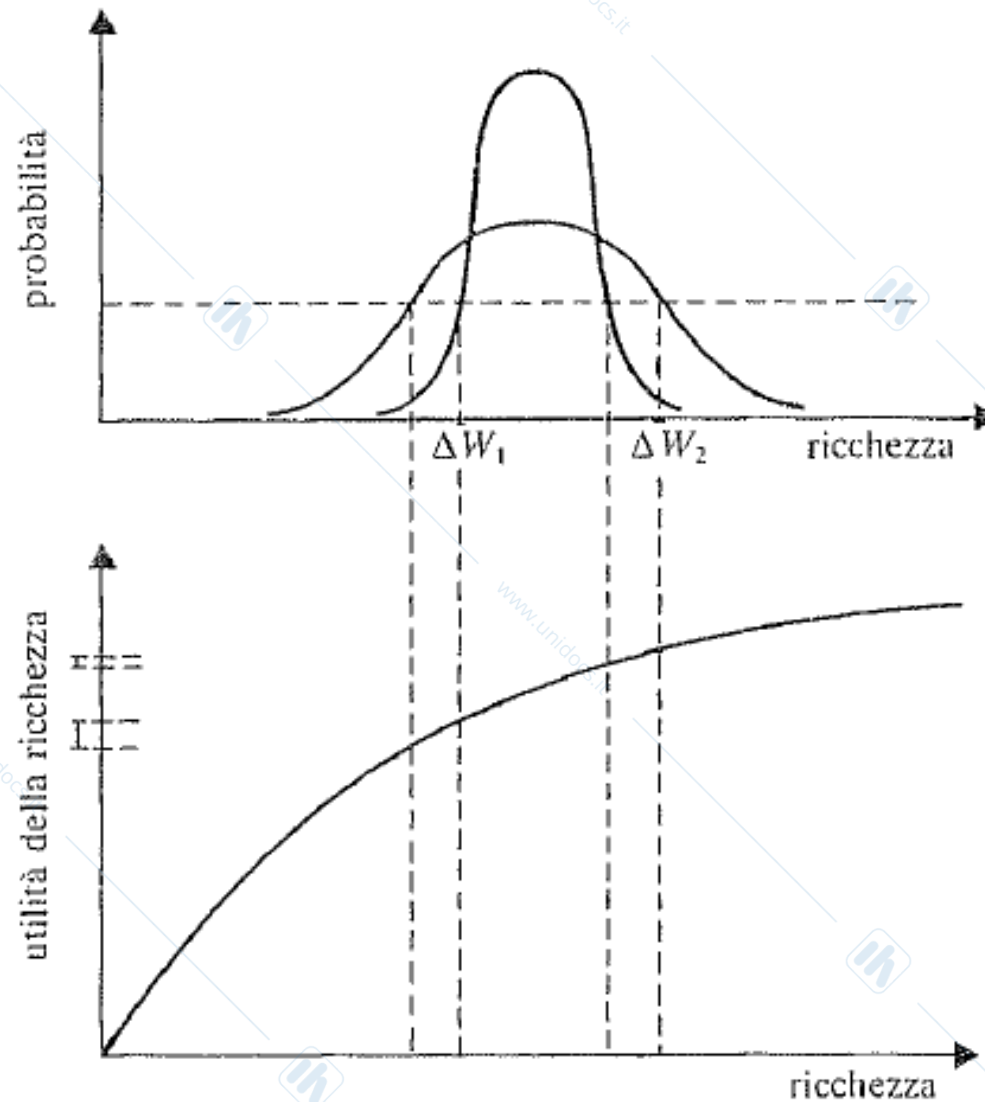
- **Non stazionarietà:** media e varianza cambiano nel tempo
  - **Leptocurtosi:** maggiore probabilità di osservare valori vicini o lontani dalla media, minore probabilità di osservare valori intermedi
- **Asimmetria:** il rendimento di un titolo non ha limiti superiori, mentre non può essere inferiore al -100% (perdita del capitale investito). Se un titolo perde il 50%, deve successivamente guadagnare il 100% per tornare al valore iniziale

Leptocurtosi e, in particolare, asimmetria nella distribuzione dei rendimenti rendono **inapplicabile il criterio della media-varianza**.



# Conseguenze dell'asimmetria sul principio media-varianza

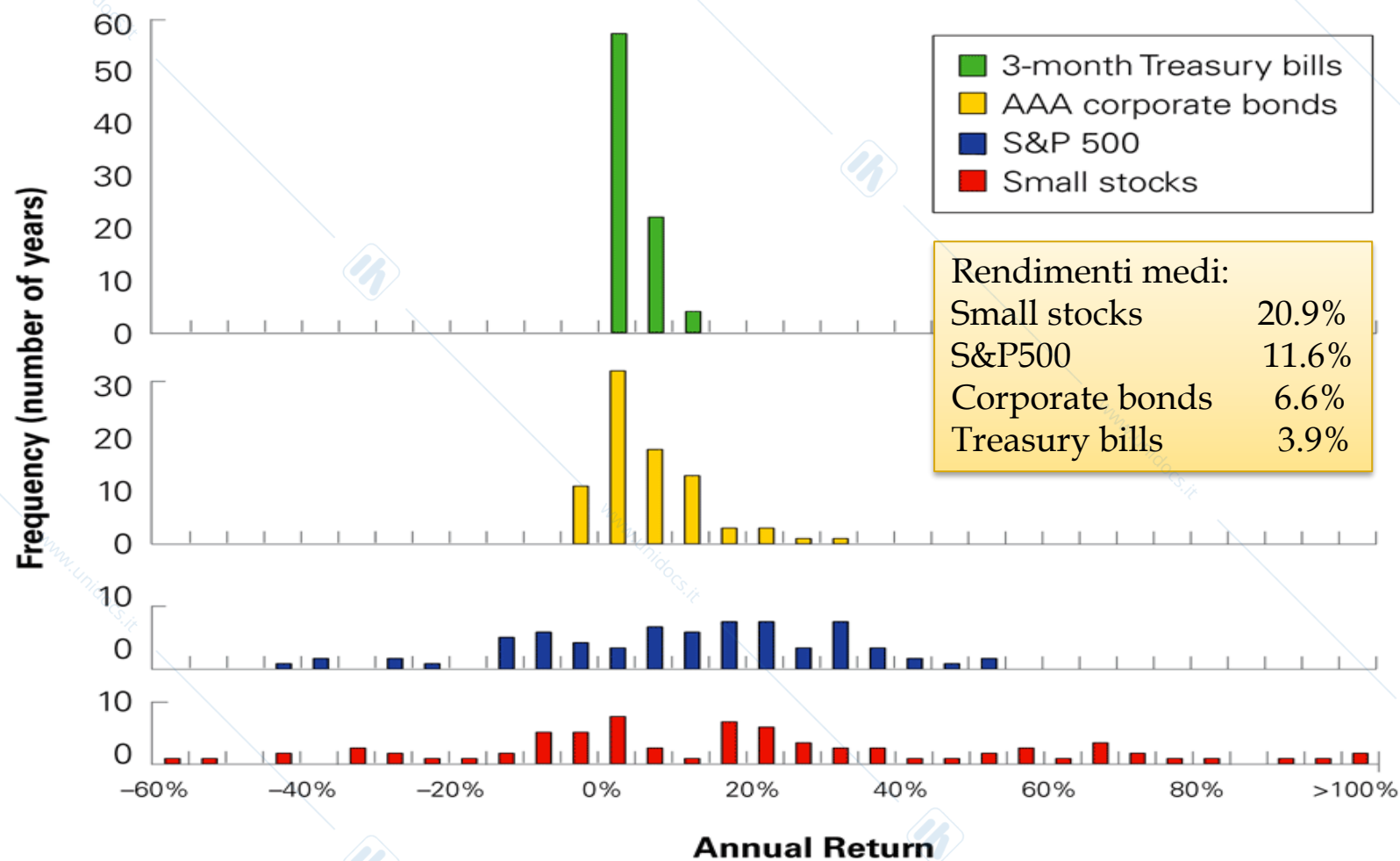
- Normalità: ad ogni scostamento dalla media corrisponde uno scostamento di pari entità e segno opposto avente uguale probabilità
  - Ma a parità di scostamento dalla media: il «guadagno» di utilità non compensa la «perdita» di utilità (avversione al rischio)
- A parità di rendimento atteso, l'investimento con risultati meno dispersi ha maggiore utilità attesa





# Distribuzione dei rendimenti

Empirical Distribution of Annual Returns for U.S. Treasury Bills, Corporate Bonds, Large Stocks (S&P 500), and Small Stocks. Period: 1926–2008.





UNIVERSITÀ  
CATTOLICA  
del Sacro Cuore

## Diversificazione di portafoglio



Il **peso** di un titolo  $j$  all'interno di un portafoglio è la frazione investita in  $j$  in rapporto all'investimento totale di portafoglio:

$$x_j = \frac{\text{Valore dell'investimento nel titolo } j}{\text{Valore monetario del portafoglio}}$$

La somma dei pesi di ciascun titolo all'interno di un portafoglio dev'essere 1.

Esempio: portafoglio con due titoli, 1 mln € in azioni Vodafone e 3 mln € in azioni British Airways. I pesi dei due titoli sono:

- Vodafone:  $\text{€ } 1,000,000 / \text{€ } 4,000,000 = 0.25$  o 25%
- British Airways:  $\text{€ } 3,000,000 / \text{€ } 4,000,000 = 0.75$  o 75%



Il **peso** di un titolo all'interno di un portafoglio può essere positivo o negativo.

- Positivo: posizione lunga (acquisto)
- Negativo: posizione corta (vendita allo scoperto, «short sale»)

Un investitore **vende allo scoperto** un titolo quando prende a prestito tale titolo da chi lo possiede e lo vende ad un compratore.

Per chiudere la posizione corta, l'investitore successivamente compra il titolo sul mercato e lo restituisce al proprietario originale.



Il **rendimento atteso** di un portafoglio di titoli è pari alla media pesata dei rendimenti dei singoli titoli

$$\bar{r} = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n r_n = \sum_{i=1}^n x_i r_i$$

Esempio: calcolo rendimento portafoglio 1 €m Vodafone + 3 €m British Airways

Rendimento: Vodafone = 10%; BA = 5%

→ Media pesata dei rendimenti:  $10\% * 0.25 + 5\% * 0.75 = 6.25\%$



- La **covarianza** tra i rendimenti di due titoli è la media dei prodotti dei loro scostamenti dalla media

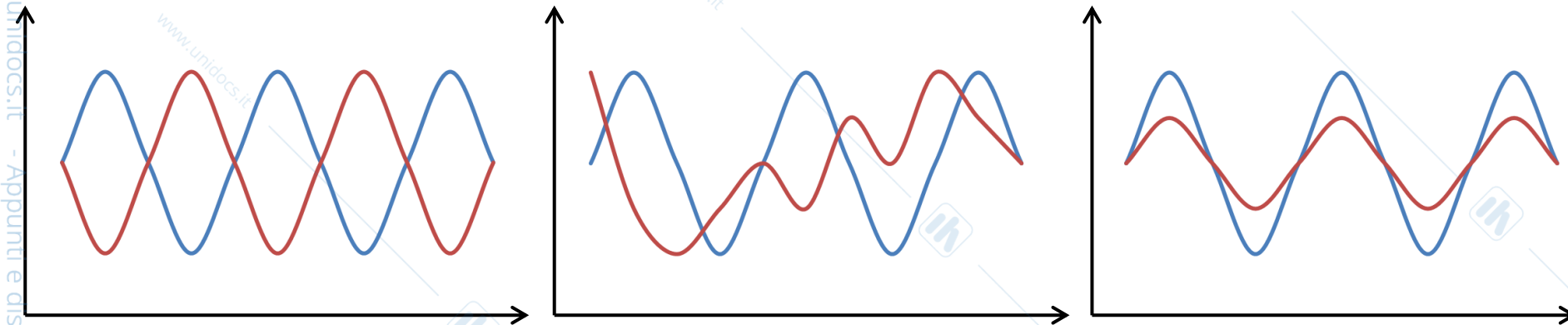
$$\text{Cov}(r_i, r_j) = \sigma_{ij} = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)]$$

- $> 0$  indica che i rendimenti tendono a muoversi nella stessa direzione
- $< 0$  indica che i rendimenti tendono a muoversi in direzioni opposte

- La **correlazione** tra i rendimenti di due titoli è la covarianza dei due rendimenti divisa per il prodotto dei loro scarti quadratici medi (o deviazioni standard)

$$\text{Corr}(r_i, r_j) = \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Non dipende dall'unità di misura delle due grandezze: è sempre compresa in  $[-1,1]$



correlati  
negativamente  
in modo perfetto

non correlati

correlati  
positivamente  
in modo perfetto

-1

0

+1

si muovono  
sempre  
in direzione  
opposta

tendono  
a muoversi  
in direzione  
opposta

nessuna  
tendenza

tendono  
a muoversi  
nella stessa  
direzione

si muovono  
sempre  
nella stessa  
direzione



# Varianza di un portafoglio con due (o più) titoli

**Varianza** di un portafoglio composto da due titoli  $a$  e  $b$  aventi peso rispettivamente  $x_a$  e  $x_b$ :

$$\text{Var}(x_a r_a + x_b r_b) = x_a^2 \sigma_a^2 + x_b^2 \sigma_b^2 + 2x_a x_b \sigma_{ab}$$

Nota:  $\sigma_{ab} = \sigma_{ba}$

Questo è un caso particolare ( $n=2$ ) della formula per il calcolo della varianza di un **portafoglio con  $n$  titoli**:

$$\sigma_P^2 = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_i \sum_j x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

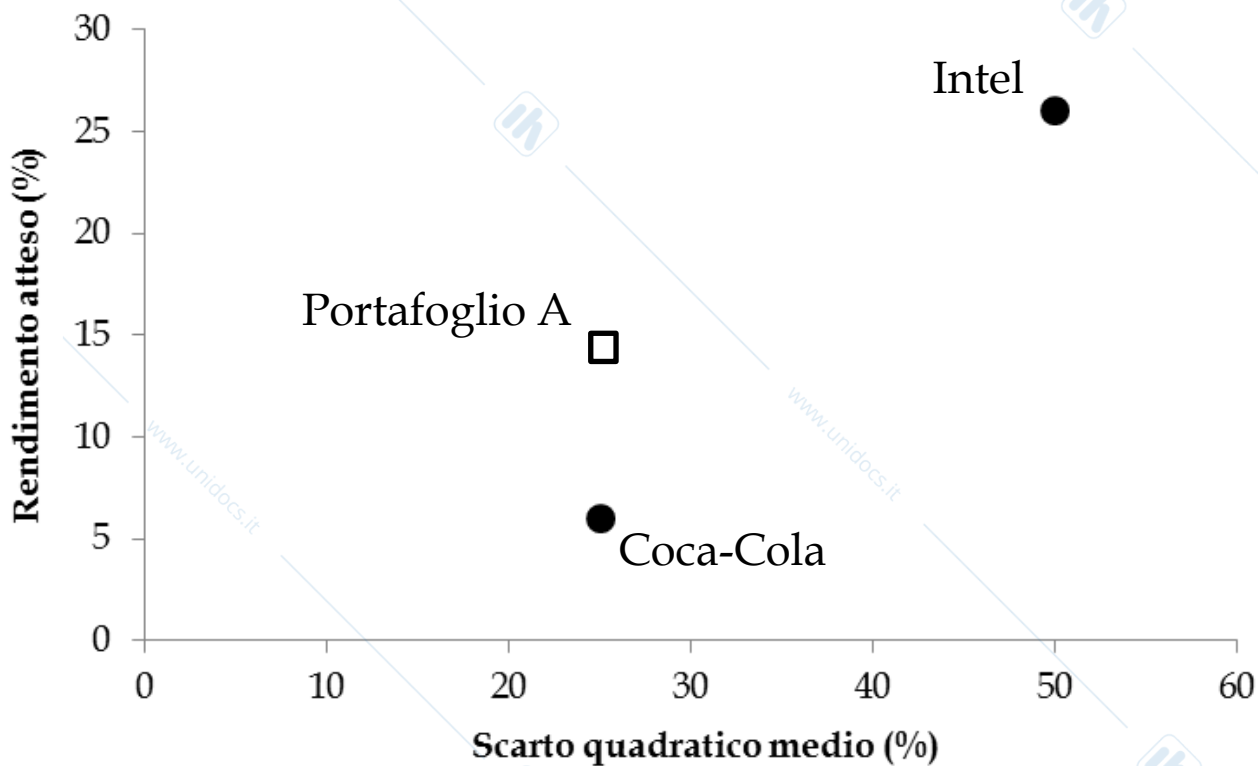


# Esempio di portafoglio con due titoli

Portafoglio con due titoli:

Intel  $r_i = 26\%$ ;  $\sigma_i = 50\%$

Coca-Cola  $r_c = 6\%$ ;  $\sigma_c = 25\%$



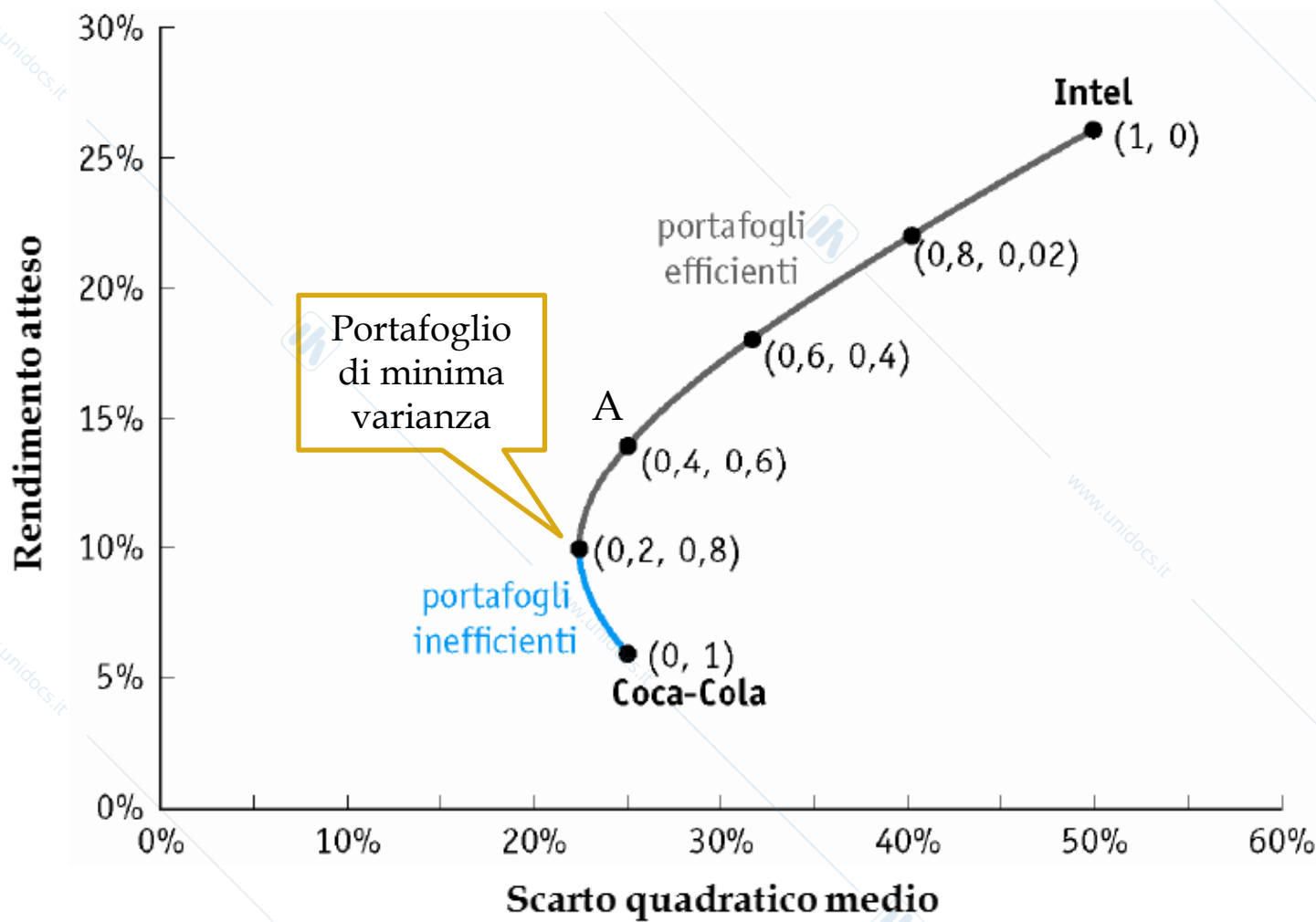
Portafoglio A con pesi:

40% Intel

60% Coca-Cola

$r_A = 14\%$

$\sigma_A = 25\%$





# Rendimento e rischio di un portafoglio come somma di v.c.

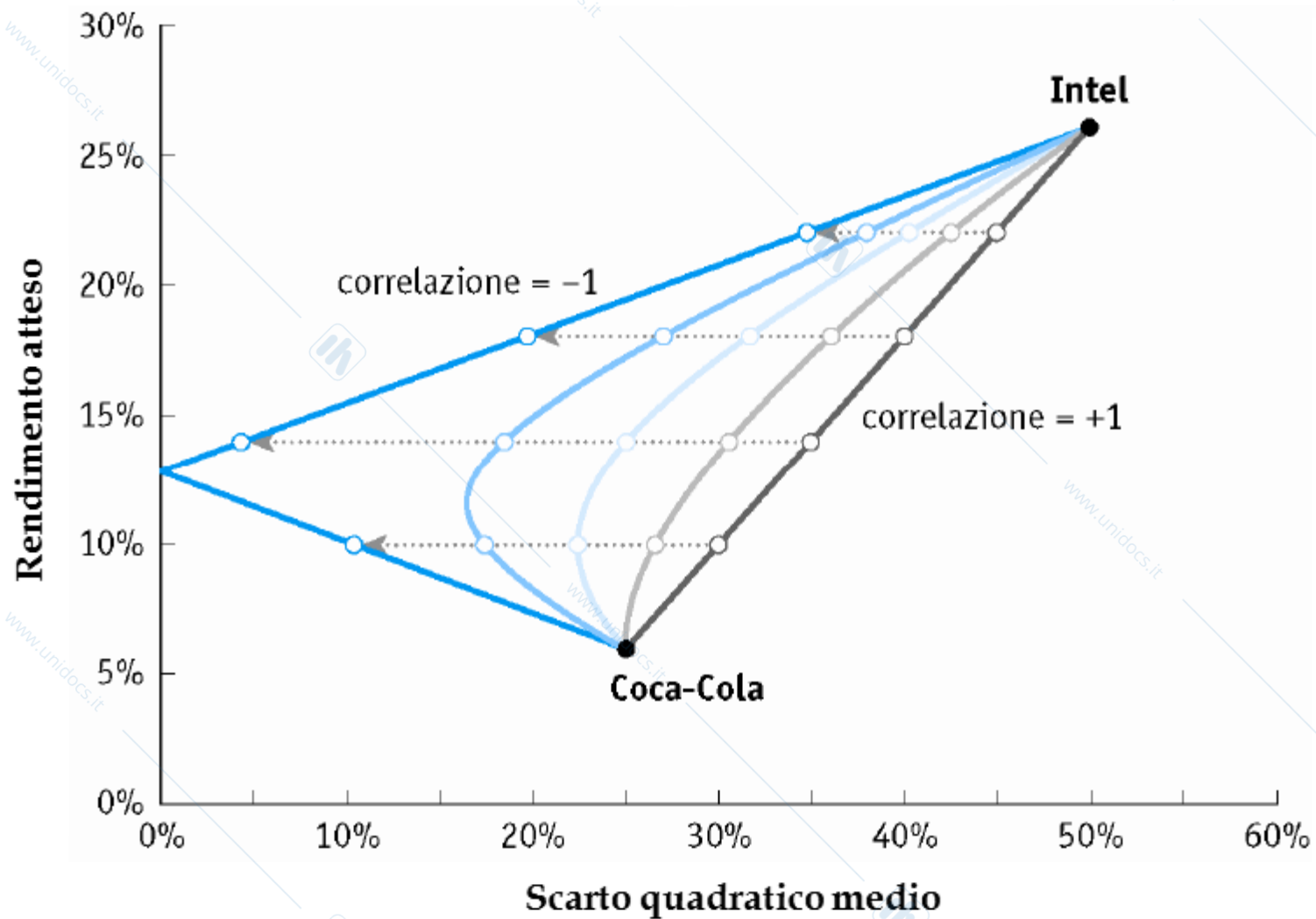
Il **Rendimento atteso** di portafoglio è uguale alla media pesata dei rendimenti dei singoli titoli, ma ciò non vale per lo **scarto quadratico medio**, per via di due effetti:

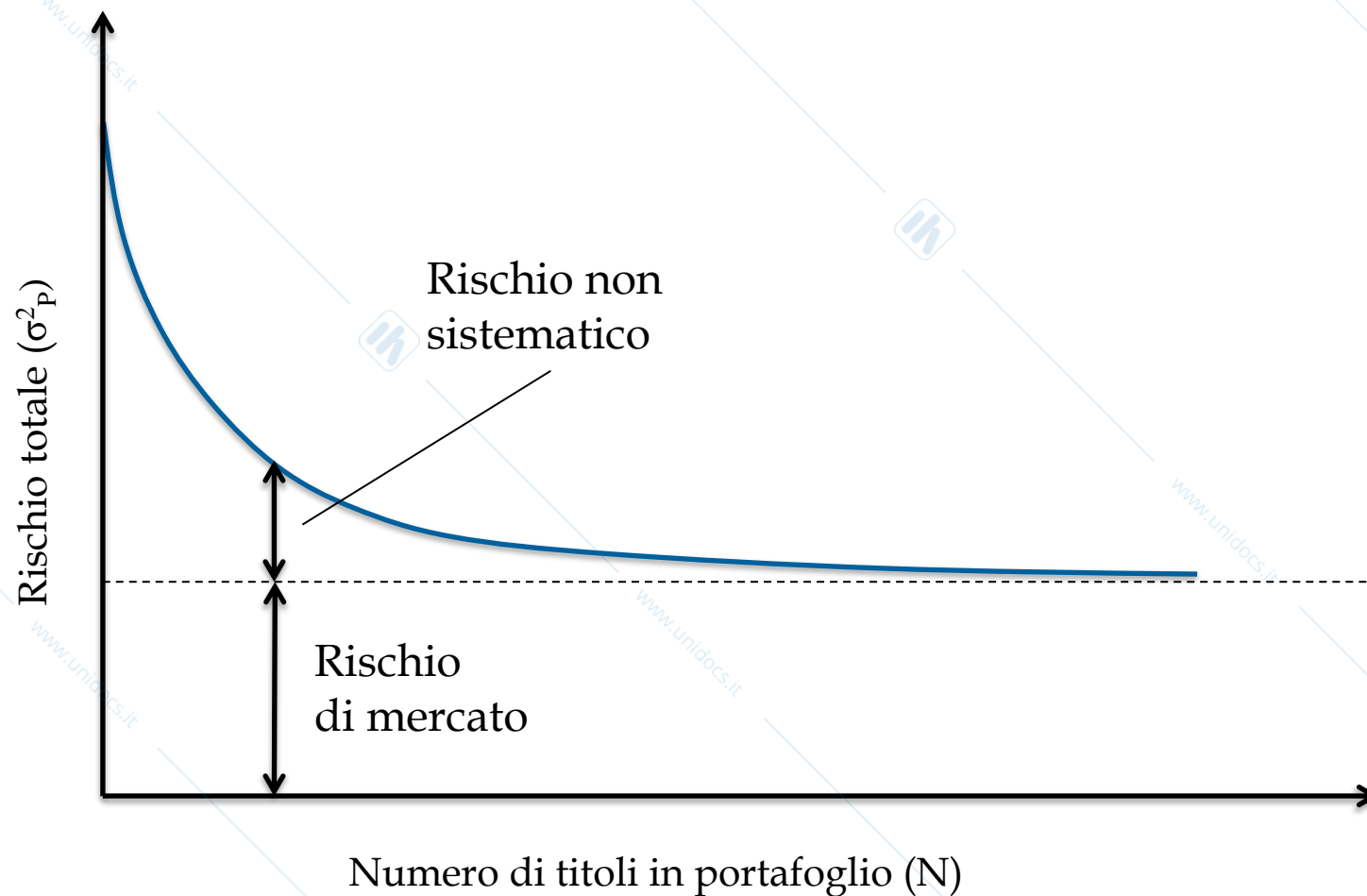
## 1. Effetto **correlazione**

- $\rho_{ij} = 1$ : sqm di portafoglio = media pesata degli sqm dei singoli titoli
- $\rho_{ij} < 1$  (quasi sempre): sqm di portafoglio < media pesata degli sqm dei singoli titoli
- $\rho_{ij} = -1$ : esiste una combinazione di pesi dei titoli tale per cui sqm di portafoglio = 0

## 2. Effetto **numerosità**: al crescere del numero di titoli, la varianza di un portafoglio dipenderà dalle covarianze delle coppie di titoli più che dalle varianze dei singoli titoli

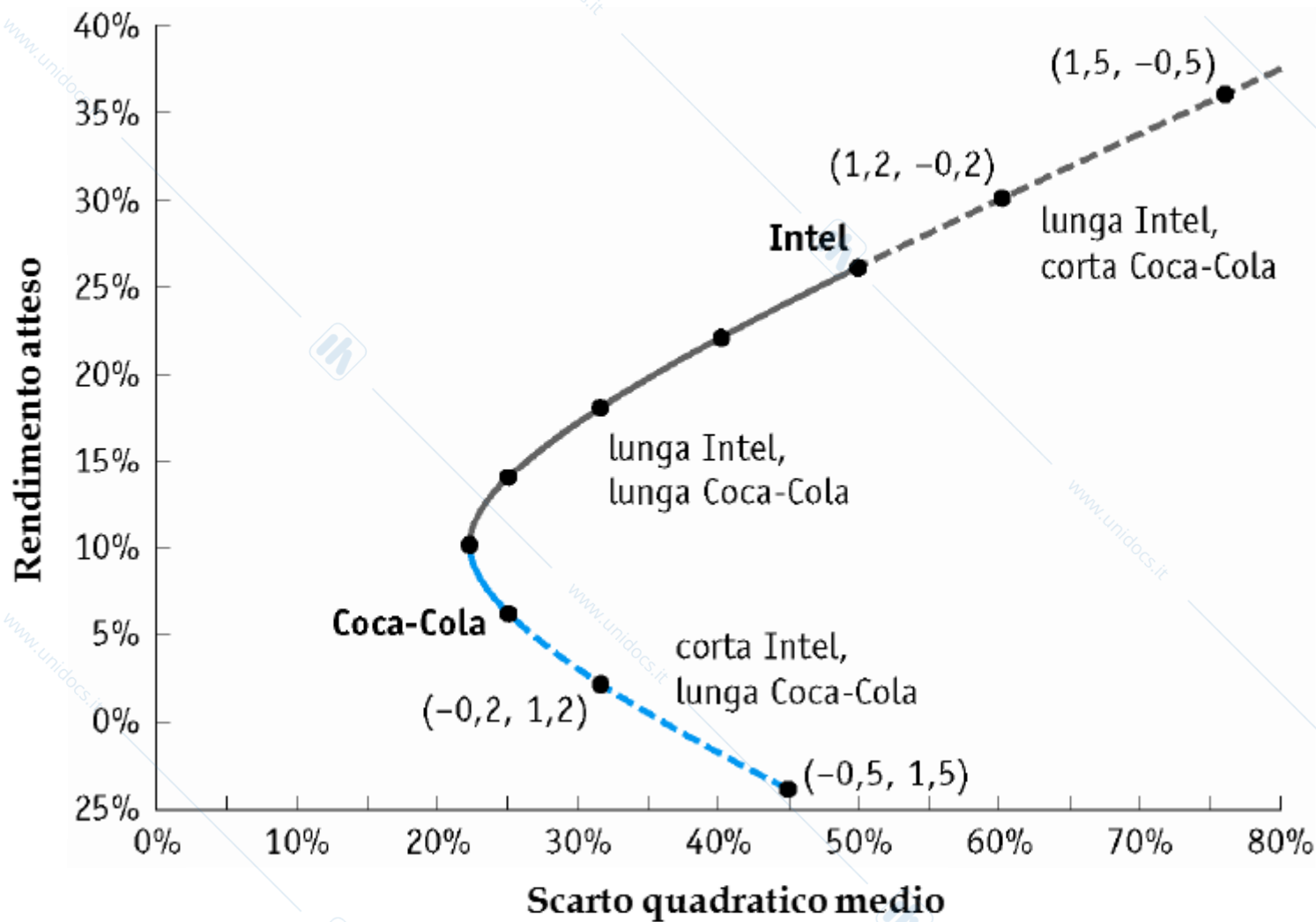
- Se il numero di titoli tende a infinito, il contributo delle varianze dei singoli titoli alla varianza del portafoglio tende a zero







# Portafogli con possibilità di vendita allo scoperto





- Il rischio può essere ridotto investendo una parte del denaro in un investimento privo di rischio o *risk-free* (ad es., Titoli di Stato). Costruisco un portafoglio Q con pesi:

$x$  in  $R_P$ , portafoglio rischioso  
 $1-x$  in  $r_f$ , titoli di Stato

- Rendimento atteso  $E(R_Q)$ :

$$(1-x)r_f + xE(R_P) = r_f + x [ E(R_P) - r_f ]$$

- Varianza  $Var(R_Q)$ :

$$(1-x)^2 Var(r_f) + x^2 Var(R_P) + 2(1-x)x Cov(r_f, R_P)$$

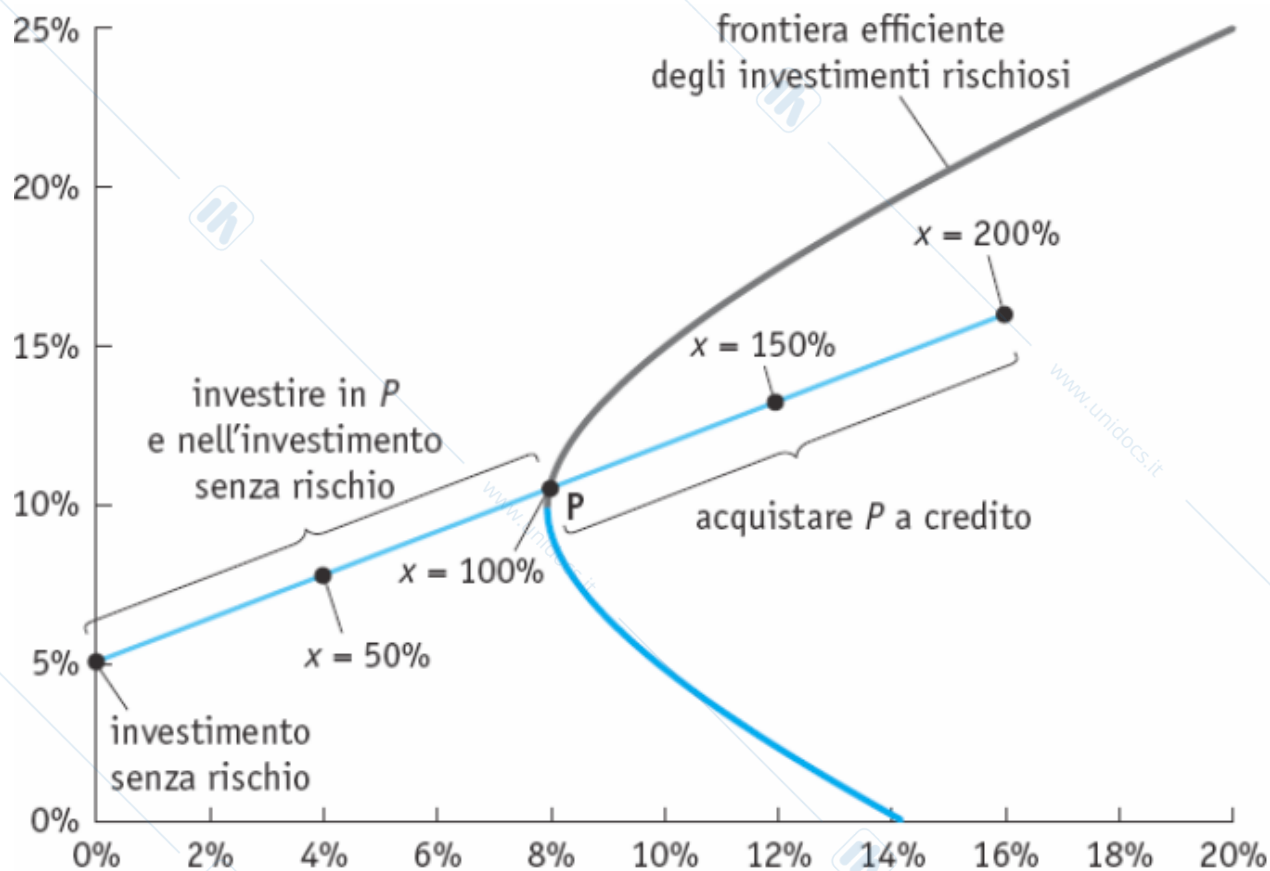
ma  $Var(r_f) = 0$  e  $Cov(r_f, R_P) = 0$  perché *risk-free*, quindi:

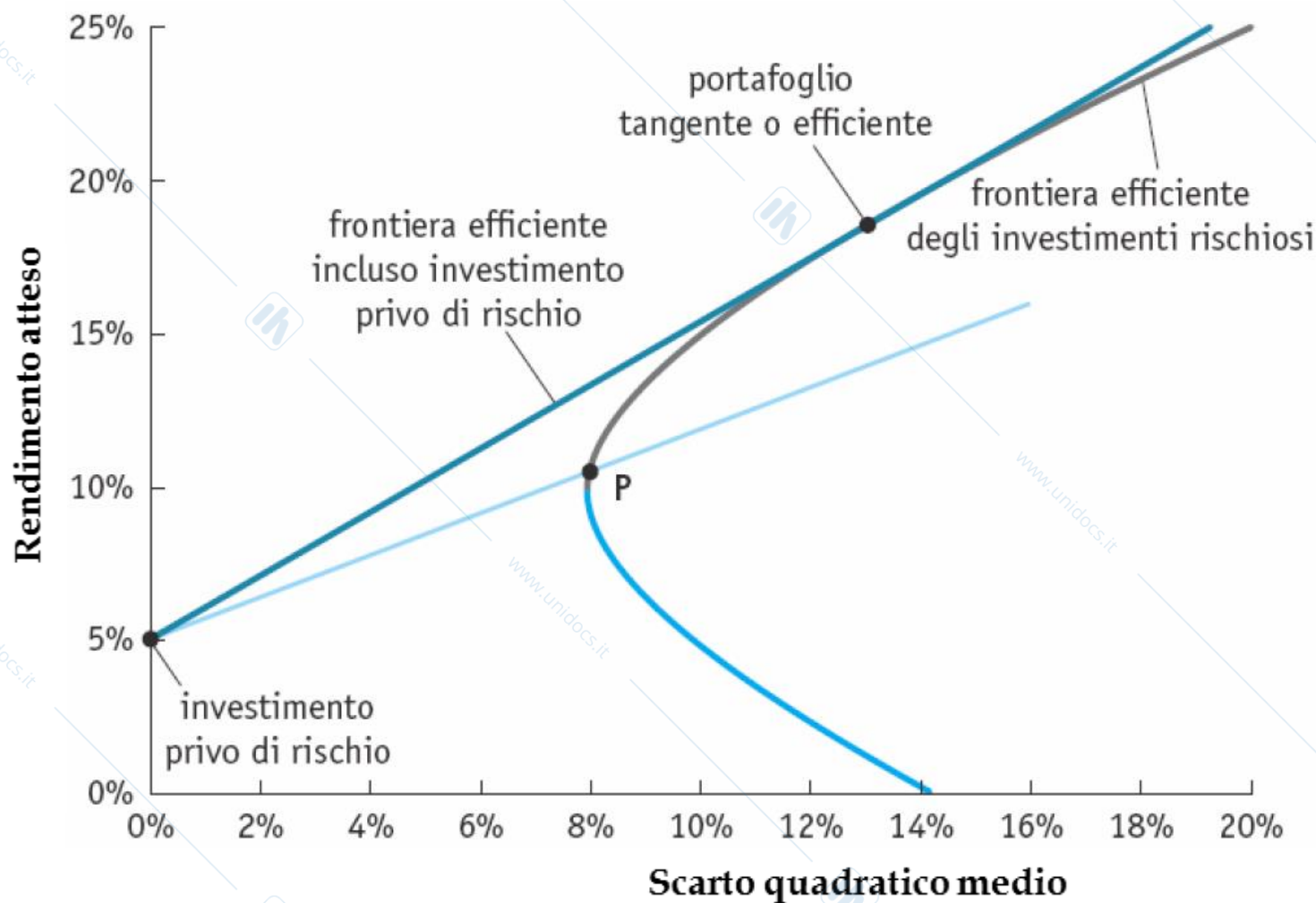
$$Var(R_Q) = x^2 * Var(R_P)$$



# Indebitarsi a tasso privo di rischio

Per cercare di ottenere rendimenti attesi più elevati, un investitore può prendere a prestito denaro e investirlo in azioni: **posizione corta su un investimento risk-free**







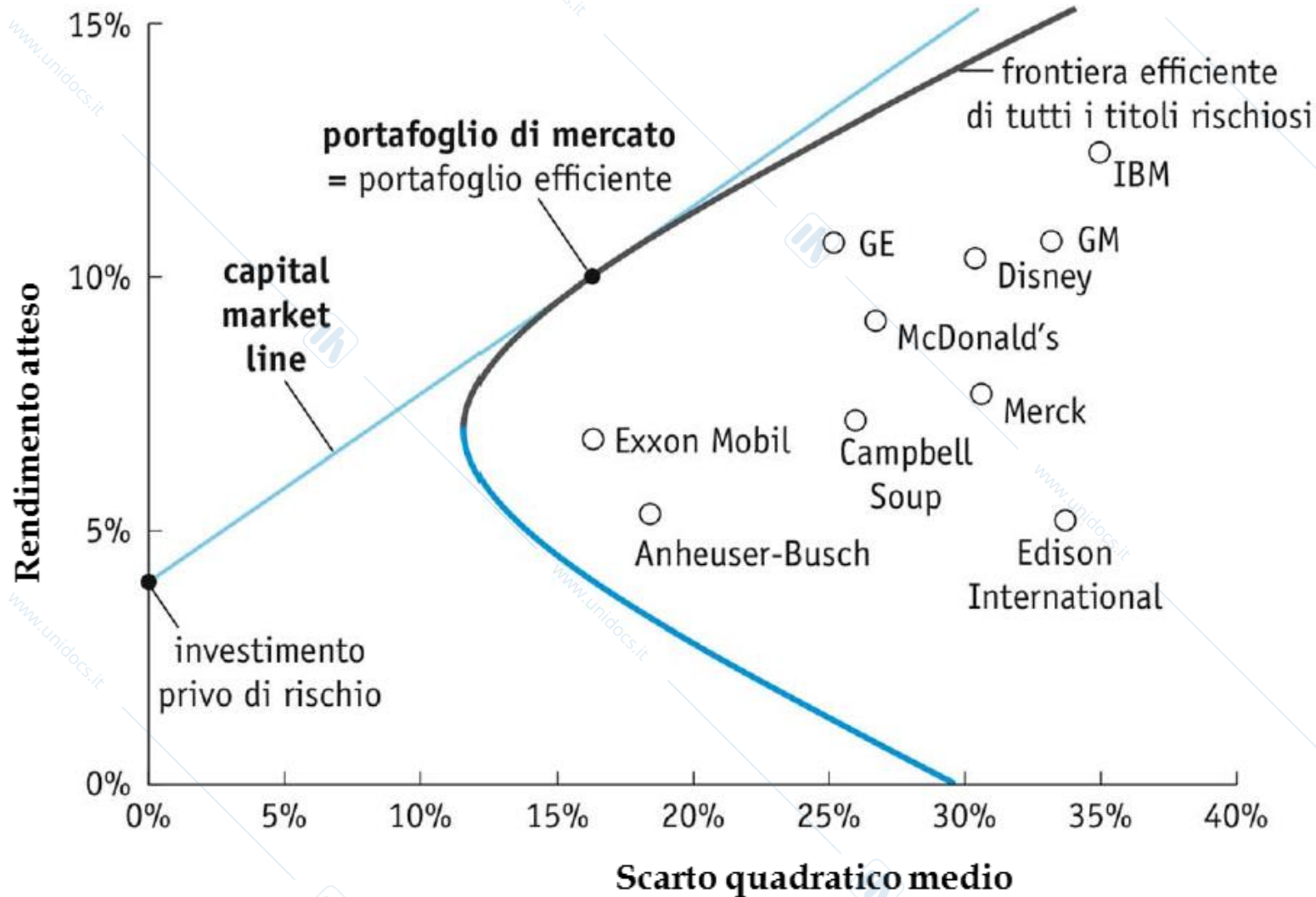
- Il portafoglio tangente **massimizza il rendimento** per unità di volatilità rispetto a qualunque portafoglio disponibile
- Ha il più alto **indice di Sharpe**:

$$\frac{\text{Extra - rendimento del portafoglio}}{\text{Volatilità del portafoglio}} = \frac{R_P - R_f}{\sigma_P}$$

- Il portafoglio tangente è **efficiente**, così come lo sono tutti quelli ottenuti da combinazioni dell'investimento privo di rischio e del portafoglio tangente
- Ogni investitore dovrà investire nel portafoglio tangente indipendentemente dalla sua **attitudine al rischio**. Le preferenze individuali determineranno solo **quanto investire** nel portafoglio tangente rispetto all'investimento risk-free



# Capital Market Line



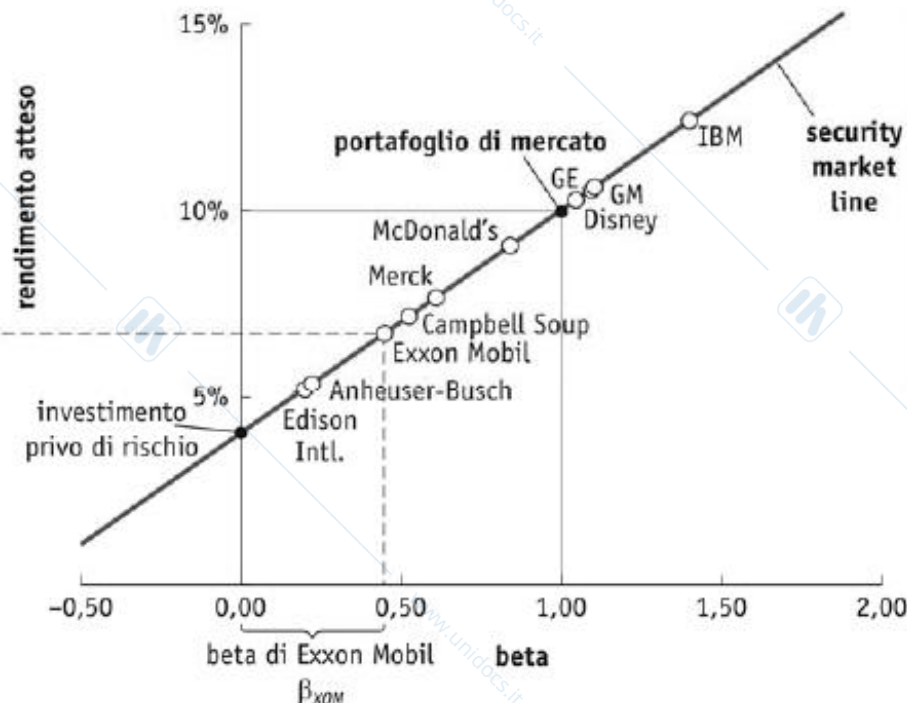
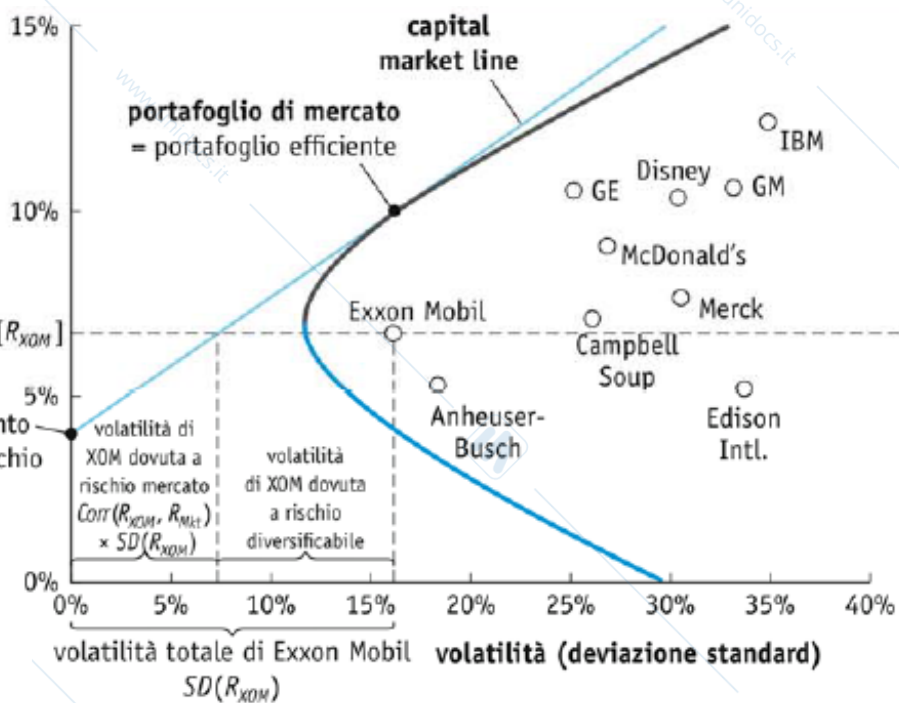


# Assunzioni dell'analisi M-V e equazione della Capital Market Line

- Gli investitori valutano gli investimenti solo attraverso due parametri: media e varianza
  - Assenza di costi di transazione e tasse
    - Gli investitori possono acquistare/vendere qualsiasi volume di titoli a prezzo di mercato e prendere/dare a prestito denaro a tasso risk-free
  - Gli investitori hanno aspettative omogenee su volatilità, correlazioni e rendimenti attesi dei titoli
- allora tutti gli investitori sceglieranno portafogli situati sulla CML:

$$R_P = R_f + \frac{R_M - R_f}{\sigma_M} \sigma_P$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



- CML: luogo dei portafogli, ottenuti combinando risk-free e ptf efficiente, che massimizzano il **rendimento atteso per ciascun livello di volatilità**

$$R_P = R_f + \frac{R_M - R_f}{\sigma_M} \sigma_P$$

- SML: rendimento richiesto per ciascun titolo **in funzione del suo beta**

$$\bar{R}_i - R_f = \beta_i (\bar{R}_T - R_f)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



## Rendimento atteso e s.q.m. di un portafoglio di due titoli [2.3]

Sono dati due titoli, A e B. Del titolo A sapete che  $E(R_A) = 3.2\%$  e lo s.q.m. dei rendimenti è pari al 4% (entrambi i dati sono riferiti ai rendimenti mensili); del titolo B osservate le seguenti 4 osservazioni riferite ai prezzi nell'ultimo giorno del mese negli ultimi 4 mesi:

Mese 1	120
Mese 2	115
Mese 3	125
Mese 4	130

e ipotizzate che il rendimento atteso e lo s.q.m. dei rendimenti di B sia pari al rendimento medio e allo s.q.m. storico che potete calcolare sulla base delle precedenti quattro osservazioni.

La covarianza dei rendimenti tra A e B è pari a 0.0015. Calcolate il rendimento atteso e lo s.q.m. di un portafoglio P con peso 0.3 nel titolo A e peso 0.7 nel titolo B.



UNIVERSITÀ  
CATTOLICA  
del Sacro Cuore

# Il CAPM e suoi approfondimenti



Se le assunzioni dell'analisi media-varianza sono valide, allora:

- Il portafoglio di tangenza dev'essere il **portafoglio di mercato**
- **Il portafoglio di mercato giace sulla CML**, mentre tutti gli altri titoli e portafogli contengono una componente di rischio diversificabile e giacciono pertanto a destra della CML
- **Tutti i titoli e portafogli giacciono sulla SML**

I rendimenti attesi dei titoli sono determinati secondo l'equazione del CAPM:

$$\bar{R}_i - R_f = \beta_i(\bar{R}_M - R_f)$$

con  $R_M$  rendimento del portafoglio di mercato  
 $\beta$  stimato rispetto ai rendimenti del portafoglio di mercato

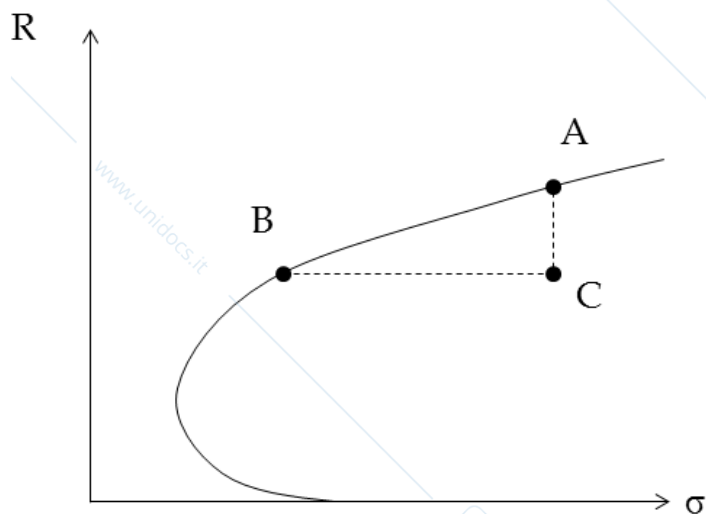


Il beta di un portafoglio è la media ponderata dei beta dei titoli che lo compongono

$$\begin{aligned}\beta_P &= \frac{\text{Cov}(R_P, R_{Mkt})}{\text{Var}(R_{Mkt})} = \frac{\text{Cov}\left(\sum_i x_i R_i, R_{Mkt}\right)}{\text{Var}(R_{Mkt})} = \\ &= \sum_i x_i \frac{\text{Cov}(R_i, R_{Mkt})}{\text{Var}(R_{Mkt})} = \sum_i x_i \beta_i\end{aligned}$$



- Se alcuni investitori scegliessero di investire in un portafoglio **non collocato sulla frontiera efficiente**, allora anche il portafoglio di mercato non potrebbe essere situato sulla frontiera efficiente
- In questo caso, l'equazione del CAPM:  $E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_m) - R_f]$  **non sarebbe verificata**
  - Noti  $E(R_m)$  e  $R_f$ , non saremmo in grado di dire qual è il rendimento atteso  $E(R_i)$  di un titolo  $i$  sulla base della conoscenza del suo beta  $\beta_i$



L'investitore che rispetta il principio M-V non sceglierebbe mai il portafoglio C

Tuttavia, C potrebbe essere preferito per un **terzo criterio** non rappresentato sul piano M-V



# Ulteriori assunzioni del CAPM

- 1) Assenza di costi di transazione
- 2) Infinita divisibilità degli investimenti
- 3) Gli ordini di acquisto e vendita degli investitori non spostano il prezzo dei titoli
- 4) Non esistono restrizioni alle vendite allo scoperto
- 5) E' possibile investire e prendere a prestito senza limite a tasso privo di rischio
- 6) Non esistono imposte sui redditi da capitale
- 7) Esiste piena omogeneità di aspettative da parte di tutti gli investitori
- 8) Tutti gli investimenti sono negoziabili sul mercato



- **Assunzioni 1-5:** non perfettamente verificate nella realtà, ma il cui impatto sulle condizioni di mercato è lieve: non dovrebbero inficiare la validità del CAPM
- **Esistenza delle imposte:** rendimento atteso al netto delle imposte varia da soggetto a soggetto (es., individuo vs. fondo pensione), generando diverse frontiere efficienti per diversi soggetti
- **Omogeneità delle aspettative:** non verificata, anche se grandi banche e organizzazioni di investimento tenderanno ad utilizzare la miglior informazione disponibile e interpretarla in modo non troppo difforme
- **Negoziabilità di tutti gli investimenti:** esistono investimenti che non si possono diversificare liberamente (es. capitale umano di un individuo, casa, ecc.)



## CAPM [4.5]

In un mercato in cui vale il CAPM si osservano i seguenti parametri:

$R_f$	0.04
$E(R_M)$	0.16
$\sigma_M$	0.2

Qual è il minimo livello di s.q.m. possibile per un portafoglio con rendimento atteso pari a 0.10? Qual è il massimo livello di rendimento atteso possibile per un portafoglio con s.q.m. pari a 0.35?

In quest'ultimo portafoglio, investo nel titolo privo di rischio oppure prendo a prestito a quel tasso?