Esercizi di Finanza Quantitativa

I. Oliva., G. Stabile (Dipartimento di Metodi e modelli per il Territorio, l'Economia e la Finanza)

30 maggio 2020

Di seguito sono proposti alcuni esercizi relativi alla valutazione di contratti derivati, alla approssimazione binomiale di modelli di mercato a tempo continuo, metodi alle differenze finite e metodo Monte Carlo.

1. Si consideri un contratto forward negoziato oggi, con scadenza 3 mesi, scritto su un bene il cui prezzo attuale sia pari a 40€. Assumendo un tasso annuo di interesse pari al 5%, calcolare il prezzo di consegna del contratto e eseguire il grafico del payoff finale del contratto sia per la posizione long che short.
   Illustrare le strategie di arbitraggio che potrebbero attuarsi nel caso in cui il prezzo forward sia pari a 43€ o 38€.
   Si assuma che il contratto forward, scritto sullo stesso bene e con scadenza 5 mesi, abbia prezzo di non-arbitraggio pari a 55€. Si determini il tasso annuo di interesse di valutazione.

2. Si consideri un'opzione call europea con scadenza 6 mesi e prezzo di esercizio 31€, scritta su un titolo che non paga dividendi con prezzo corrente pari a 33€. Si assuma che il tasso annuo di interesse privo di rischio sia il 2%.

   a. Determinare il limite inferiore per il prezzo della call.
   b. Discutere cosa accadrebbe se il prezzo della call fosse inferiore rispetto a tale limite.
   c. Costruire un portafoglio costituito da un numero Δ di azioni del titolo sottostante e da un importo B investito al tasso privo di rischio che replichi il payoff della call a scadenza.
   d. Calcolare il prezzo attuale della call europea assumendo che il prezzo del titolo sottostante in ciascuno dei due prossimi trimestri possa salire del 3% o scendere del 2%. Determinare inoltre il prezzo dell'opzione put con le medesime caratteristiche contrattuali.
   e. Si discuta la convenienza dell'esercizio anticipato della corrispondente opzione call americana.

3. Si consideri un contratto di opzione put, scritta su un'azione del titolo aleatorio S con prezzo al tempo zero pari a 60€, scadenza 2 anni, strike K=60€e tasso di interesse r=5% (su base annua). Si assuma che il prezzo del titolo possa apprezzarsi o deprezzarsi in ogni periodo del 15%.
   Valutare l'opzione put sia di tipo europeo che americano mediante un albero binomiale ricombinante a due periodi.

4. Si consideri un contratto derivato di tipo europeo con scadenza un anno, scritto su un'azione del titolo S con prezzo al tempo zero pari a 8€. Il payoff del derivato a scadenza sia definito da

   $$\max\{S_T^2 - 63, 0\}$$

   Assumendo un fattore di rialzo u=1.1 e d=1/u e un tasso di interesse del r=3% (su base annua), valutare il premio del derivato mediante un albero binomiale a due periodi.
   Si scriva una funzione Matlab il cui output sia l'albero di valutazione del derivato.

5. Assumendo un modello binomiale moltiplicativo per il sottostante $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$, verificare che il prezzo di una opzione put europea al tempo t è

   $$P_t = -S_t\phi(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}\phi(-d_2)\ ,$$

   con $\phi(x)$ funzione di ripatizione di una variabile aleatoria gaussiana standard e

   $$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\ .$$

6. Sia $X \sim Bin(N, p)$ una variabile aleatoria con distribuzione binomiale con densità

   $$f(x, N, p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}\ .$$

   Dimostrare che

   $$f(x, N, p) \;\to\; g(x, N, p),\;\; \text{per } N,\ Np,\ N(1-p) \;\to\; +\infty\ ,$$

   essendo

   $$g(x, N, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} e^{-\frac{(x-Np)^2}{2Np(1-p)}}$$

   la funzione di densità di una variabile aleatoria gaussiana con media Np e varianza $Np(1-p)$.

7. Disegnare la superficie di volatilità ottenuta applicando il metodo di Newton-Raphson, per il vettore di prezzi di esercizio $K = [90,\ 95,\ 100,\ 105,\ 110]$ e vettore di scadenze $T = [0.25,\ 0.5,\ 0.75]$. Usare la matrice dei prezzi price.mat.

   Ripetere lo stesso esercizio usando i dati contenuti nel file SPXdata.xlsx.

8. Determinare la soluzione $z = z(t, x)$ per le seguenti equazioni con i metodi alle differenze finite:

   (a) per $0 \leq x \leq 2$, $t > 0$, la PDE è

   $$4z_t = z_{xx}\ ,$$

   con condizioni al contorno

   $$z(t, 0) = 0,\ z(t, 2) = 0,\ z(0, x) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x);$$

   (b) per $0 \leq x \leq \pi$, $t > 0$, la PDE è

   $$z_t = \alpha^2 z_{xx}\ ,$$

   con condizioni al contorno

   $$z(t, 0) = 0,\ z(t, \pi) = 0,\ z(0, x) = 3\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\ ,$$

   scegliendo $\alpha = \{0.5, 0.1, 3\}$;

   (c) per $0 \leq x \leq 2\pi$, $t > 0$, la PDE è

   $$z_t = z_{xx}\ ,$$

   con condizioni al contorno

   $$z(t, 0) = 0,\ z(t, 2\pi) = 0,\ z(0, x) = x;$$

   (d) per $0 \leq x \leq 3$, $t > 0$, la PDE è

   $$z_t = \frac{1}{5} z_{xx}\ ,$$

   con condizioni al contorno

   $$z(t, 0) = 0,\ z(t, 3) = 0,\ z(0, x) = 3x - x^2;$$

   (e) per $0 \leq x \leq 3$, $t > 0$, il problema è

   $$z_t = \frac{1}{5} z_{xx}\ ,$$

   con condizioni al contorno

   $$z_x(t, 0) = 0,\ z_x(t, 3) = 0,\ z(0, x) = 3x - x^2.$$

Applicare sia il metodo implicito che il metodo esplicito, verificando per quest'ultimo se la stabilità condizionata sia verificata.

9. Assumendo un modello a tempo continuo con parametri r e σ (fissati a piacere) per il prezzo del sottostante, calcolare i prezzi $C_t^{(eur)}$, $C_t^{(am)}$, $P_t^{(eur)}$, $P_t^{(am)}$ al tempo $t = 0$ di una opzione call europea, una opzione call americana, una opzione put europea ed una opzione put americana (con scadenze e prezzi d'esercizio fissati a piacere) attraverso

    - il metodo esplicito;
    - il metodo implicito;
    - il metodo di Crank-Nicholson.

    Si assuma che le condizioni al contorno del problema siano le seguenti:

    - **Condizione 1:** per ogni $j = N-1, \dots, 0$,
        - Opzione call:

        $$\begin{aligned} D_{M,i} - D_{M-1,i} &= S\exp(M\Delta x) - S\exp((M-1)\Delta x), \\ D_{-M,i} - D_{-M+1,i} &= 0; \end{aligned}$$

        - Opzione put:

        $$\begin{aligned} D_{-M,i} - D_{-M+1,i} &= S\exp(-M\Delta x) - S\exp((-M+1)\Delta x), \\ D_{M,i} - D_{M-1,i} &= 0; \end{aligned}$$

    - **Condizione 2:** per ogni $j = N-1, \dots, 0$,
        - Opzione call:

        $$\begin{cases} D_{M,j} & = S\exp(M\Delta x) - K\exp(-r(N-i)\Delta t), \\ D_{-M,j} & = 0; \end{cases}$$

        - Opzione put:

        $$\begin{aligned} D_{-M,i} &= K\exp(-r(N-i)\Delta t) \\ D_{M,i} &= 0; \end{aligned}$$

10. Verificare dal punto di vista teorico che, per una opzione call europea, sono valide le seguenti relazioni per le greche:

    - $\Theta_c = -\frac{S_0 f(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\phi(d_2)$
    - $\rho_c = KTe^{-rT}\phi(d_2)$

essendo $f(x)$ (rispettivamente, $\phi(x)$) la densità di probabilità (rispettivamente, la funzione di ripartizione) di una variabile aleatoria gaussiana standard.

11. Verificare dal punto di vista teorico che, per una opzione put europea, sono valide le seguenti relazioni per le greche:

    - $\Delta_p = \phi(d_1) - 1$
    - $\Gamma_p = \frac{f(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$
    - $\Theta_p = -\frac{S_0 f(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}\phi(-d_2)$
    - $V_p = S_0\sqrt{T}f(d_1)$
    - $\rho_p = -KTe^{-rT}\phi(-d_2)$

    essendo $f(x)$ (rispettivamente, $\phi(x)$) la densità di probabilità (rispettivamente, la funzione di ripartizione) di una variabile aleatoria gaussiana standard.

12. Utilizzando opportunamente i metodi alle differenze finite, calcolare i valori di Δ, Γ, V, Θ, ρ per una call e una put europee.

13. Utilizzando il metodo Monte Carlo con M simulazioni, determinare un campione di lunghezza n dell'integrale
$$I = \int_a^b f(x)dx \ ,$$
    per le seguenti funzioni integrande ed estremi di integrazione:

    - $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$, con $a = 0$ e $b = 1$;
    - $f(x) = \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}$, con $a = 0$ e $b = 2$;
    - $f(x) = \frac{\sqrt(x)-3}{x-3\sqrt{x}+2}$, con $a = 9$ e $b = 16$;

    Per ciascuno dei campioni ottenuti, confrontare la distribuzione teorica e la distribuzione empirica.

14. Utilizzando il metodo Monte Carlo con M simulazioni ed un campione di lunghezza n, valutare l'area delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ e dall'asse x nei seguenti casi:

    - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, con $x \in [1, 4]$;
    - $f(x) = (x-1)\log(x^2+4)$, con $x \in [0, 1]$;

    Per ciascuno dei campioni ottenuti, confrontare la distribuzione teorica e la distribuzione empirica. Disegnare il grafico di ciascuna funzione.

15. Estrarre, da una distribuzione normale standard, due variabili aleatorie indipendenti X_1 e X_2 e calcolare la quantità
$$S^* = 120 \cdot |X_1 \cdot X_2| \ .$$
Assumendo un modello a tempo continuo come dinamica del sottostante con parametri scelti a piacere, calcolare con i metodi alle differenze finite il prezzo al tempo $t = 0$ di un derivato avente il seguente payoff:
$$D_T = \begin{cases} S_T - K, & \text{se } S_T > S^* \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \ .$$

16. In un modello a tempo continuo determinare, attraverso approssimazione binomiale con parametri ottenuti tramite metodo CRR, il prezzo al tempo iniziale di una opzione call europea 10% In-The-Money, con maturity $T = 2$ anni e strike price $K = 10$, assumendo un tasso risk-free pari al 2% ed un parametro di volatilità uguale al 30%. Studiare, infine, la convergenza del metodo.

17. In un modello di mercato a tempo continuo, con parametri $r = 2\%$, $\sigma = 25\%$, $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$, calcolare, con il metodo Monte Carlo, il valore di una opzione al tempo iniziale, il cui payoff è dato dalla seguente espressione
$$P_T = \max\left\{\max\left\{\phi \cdot (S_T - K), \phi \cdot (S_{t_c} - K)\right\}, 0\right\} \ ,$$
dove
$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{nel caso di opzione call} \\ -1, & \text{nel caso di opzione put} \end{cases}$$
e t_c, $0 < t_c < T$, risulta essere la 120-ima osservazione, assumendo osservazioni giornaliere $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p-1} < t_p = T$.

18. Assumendo un modello a tempo continuo come dinamica del sottostante, con $S_0 = 100$, $K = 85 : 5 : 120$, $T = 1 : 10$, $\sigma = 20\%$, $r = 6\%$, calcolare i prezzi di una call europea con i metodi alle differenze finite.

    Rappresentare graficamente la superficie dei prezzi del derivato, al variare del prezzo d'esercizio K e della maturity T nei rispettivi intervalli.

19. Per ciascuno dei precedenti esercizi in cui si richiede di calcolare il prezzo di un derivato, determinare il valore delle greche.

20. Con il metodo Monte Carlo, implementare un codice MATLAB per la stima del valore di π.