# ESERCIZI SVOLTI DI CINEMATICA

1. Un treno A parte da Valencia alle ore 12:00 diretto verso Barcellona, distante $350\,Km$, viaggiando ad una velocità media costante di $100\ Km/h$. Un secondo treno B parte da Barcellona diretto verso Valencia alle ore 14:00 e viaggia ad una velocità media costante di $80\ Km/h$. A che ora e a quale distanza da Valencia i due treni si incontrano?

$[14{:}50; \approx 283\ Km]$

**SOL.**

Dividiamo il problema in due fasi:

a) Dalle 12:00 alle 14:00 si muove solo il treno A, mentre il treno B rimane fermo a Barcellona.
b) Dalle 14:00 in poi si muovono entrambi i treni, l'uno verso l'altro.

FASE a)

Fissiamo l'origine degli spazi a Valencia, il verso positivo da Valencia a Barcellona e come unità di misura degli spazi il Km. Scegliamo come origine dei tempi l'istante in cui A parte da Valencia.
Quindi l'equazione oraria di A è:

$$s = 100\ t$$

Quando parte il treno B da Barcellona, cioè quando $t = 2\ h$ si ha che la posizione di A è $s = s(2\ h) = 100\ \cdot 2 = 200\ Km$ .

FASE b)

Ora fissiamo una nuova origine degli spazi nel punto in cui si trova A alle 14:00 ( cioè come abbiamo appena visto a 200 Km da Valencia).
Il verso positivo degli spazi è lo stesso di prima , ovvero da Valencia a Barcellona, e l'unità di misura ancora in Km.
Fissiamo come nuova origine dei tempi l'istante in cui parte B da Barcellona.
Con queste premesse le equazioni orarie dei due treni sono:

$$\begin{aligned} &treno\ A: && s = 100\ t \\ &treno\ B: && s = -80\ t + (350 - 200) \end{aligned}$$

Osserviamo che la velocità del treno B è negativa in quanto si muove in verso opposto al nostro verso positivo e inoltre la posizione iniziale del secondo treno è $350 - 200 = 150\ Km$ poiché nella prima fase del problema A si è avvicinato a Barcellona di $200\ Km$ (riducendo così la distanza iniziale tra i due treni che era di $350\ Km$ ).
Per determinare l'istante e la posizione dell'incontro basta risolvere il sistema delle due leggi orarie precedentemente scritte, quindi:

$$\begin{cases} s = 100\,t \\ s = -80\,t + 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 100\,t \\ 100\,t = -80\,t + 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 100\,t \\ 100t + 80\,t = 150 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = 100\,t \\ 180\,t = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 100\,t \\ \dfrac{180}{180}\,t = \dfrac{150}{180} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 100\,\dfrac{Km}{h} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\,h\right) = 83{,}3\,Km \\ t = \dfrac{5}{6}\,h = \dfrac{5}{6} \cdot 60\,\mathrm{min} = 50\,min \end{cases}$$

Ricordando che l'origine dei tempi in questa FASE b) era fissata alle ore 14:00 e che l'origine degli spazi era stata fissata a 200 Km da Valencia, interpretiamo il risultato del sistema dando la seguente risposta:

- I due treni si incontrano alle 14:50
- In una località posta a circa 283 Km da Valencia.

2. Una Golf passa alla velocità costante di $108\ Km/h$ davanti ad un autovelox della polizia in un tratto in cui il limite di velocità è di $80\ Km/h$. L'auto della polizia parte all'inseguimento della Golf dopo $7{,}20\ s$ con accelerazione costante di $2{,}00\ m/s^2$. Calcola quanto tempo impiega la polizia per raggiungere la Golf, dall'istante in cui la Golf era passata davanti all'autovelox, la distanza che la polizia deve percorrere per raggiungerla e la velocità della polizia nell'istante del raggiungimento della Golf.

$[43{,}2\ s; \approx 1{,}30\ Km; \approx 259\ \ Km/h]$

**SOL.**

Dividiamo il problema in due fasi:

a) Da quando passa la Golf (che d'ora in avanti indicheremo con G) passa davanti all'autovelox a quando parte l'auto della polizia (che d'ora in avanti indicheremo con P)
b) Da quando parte P a quando P raggiunge G.

FASE a)

Poniamo l'origine degli spazi nel punto in cui è posizionato l'autovelox, il verso positivo degli spazi è quello in cui si muove G e l'unità di misura per gli spazi è il metro $m$.
L'origine dei tempi è l'istante in cui la G passa davanti all'autovelox e l'unità di misura è il secondo $s$.
Innanzitutto trasformiamo i dati del problema in modo coerente con le unità di misura scelte:

$$v_G = 108\ \frac{Km}{h} = 108\ \cdot \frac{1000\ m}{3600\ s} = 30\ \frac{m}{s}$$

L'equazione oraria del moto della G è: $s = \ v_G\ t$ da cui segue che :

$$s(7{,}20\ s) = \ \ 30\ \frac{m}{s} \cdot 7{,}20\ s = 216\ m$$

FASE b)

Per quanto riguarda l'asse degli spazi tutto rimane come nella prima fase.
La nuova origine del tempo è l'istante in cui parte P.
Il moto dell'auto G è rettilineo uniforme con una posizione iniziale diversa da zero, mentre il moto dell'auto P è un moto rettilineo uniformemente accelerato con posizione iniziale nulla e velocità iniziale nulla.

Pertanto, le leggi orarie delle due auto sono:

$$auto\ G: \quad s = 30\,t + 216$$

$$auto\ P: \quad s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Per determinare l'istante in cui P raggiunge G e la posizione in cui il ricongiungimento avviene basta risolvere il seguente sistema :

$$\begin{cases} s = 30\,t + 216 \\ s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 30\,t + 216 \\ s = 30\,t + 216 \end{cases}$$

l'equazione risolvente di secondo grado in t che si ottiene è la seguente:

$$\frac{1}{2}\,2\,t^2 - 30\,t - 216 = 0 \Rightarrow t^2 - 30\,t - 216 = 0 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 864}}{2} = \frac{30 \pm 42}{2} = \begin{cases} -6 & non\ accettabile \\ 36 & accettabile \end{cases}$$

l'auto P raggiunge l'auto G dopo 36 secondi dall'istante in cui si è messa in moto P. Se aggiungiamo a questo tempo i 7,20 secondi di vantaggio di G allora troviamo la prima risposta al problema:

$$t = 36 + 7{,}20 = 43{,}20 = 43{,}2\ s$$

La distanza percorsa dalla P è esattamente la posizione di P corrispondente all'istante $t = 36\ s$

$$s\,(36) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36^2 = 1296\ m \approx 1{,}30\ Km$$

Allo stesso risultato si giunge ovviamente anche con l'altra equazione oraria del sistema (infatti all'istante $t = 36\ s$ le due auto occupano la medesima posizione)

$$s\,(36) = 30 \cdot 36 + 216 = 1296\ m \approx 1{,}30\ Km\ .$$

Per calcolare la velocità di P nell'istante del sorpasso basta usare la legge oraria della velocità:

$$v = a\,t + v_0 \Rightarrow v(36) = 2 \cdot 36 + 0 = 72\ m/s = 259{,}2\ Km/h \approx 260\ Km/h\,.$$

3. Un ciclista sta finendo di riparare la gomma che si è bucata quando un amico passa ad una velocità costante di $3{,}5\ m/s$. Due secondi dopo, il ciclista balza sulla sua bicicletta e accelera in modo costante con $a = 2{,}4\ m/s^2$, fino a raggiungere il suo amico.
   a) Quanto tempo impiega a raggiungere il suo amico (calcola il tempo che trascorre da quando si rimette in sella a quando raggiunge l'amico)?
   b) Quale distanza ha percorso in questo intervallo di tempo?
   c) Qual è la sua velocità quando lo raggiunge?

$[\approx 4{,}3\ s; \approx 22\ m; \approx 10\ m/s]$

**SOL.**

Il problema è molto simile a quello precedente. Chiamiamo il ciclista che inizialmente è fermo con C e l'amico che gli passa accanto con velocità costante A.
Dividiamo il problema in due fasi:

a) Da quando A passa accanto a C che sta riparando la gomma a quando riparte C .
b) Da quando riparte C a quando C raggiunge A.

FASE a)

Poniamo l'origine degli spazi nel punto in cui C sta riparando la gomma della sua bici, il verso positivo degli spazi è quello in cui si muove A e l'unità di misura per gli spazi è il metro $m$.
L'origine dei tempi è l'istante in cui A passa accanto all'amico e l'unità di misura è il secondo $s$.

L'equazione oraria del moto della A è: $s = v_A\, t$ da cui segue che :

$$s(2{,}0\ s) = 3{,}5\ \frac{m}{s} \cdot 2{,}0\ s = 7{,}0\ m$$

FASE b)

Per quanto riguarda l'asse degli spazi tutto rimane come nella prima fase.
La nuova origine del tempo è l'istante in cui parte C.
Il moto di A è rettilineo uniforme con una posizione iniziale diversa da zero, mentre il moto dell'auto C è un moto rettilineo uniformemente accelerato con posizione iniziale nulla e velocità iniziale nulla.

Pertanto, le leggi orarie dei due ciclisti sono:

$$amico\ del\ ciclista\ A: \quad s = 3{,}5\, t + 7{,}0$$

$$ciclista\ C: \quad s = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4\, t^2$$

Per determinare l'istante in cui C raggiunge A e la posizione in cui avviene il sorpasso basta risolvere il seguente sistema :

$$\begin{cases} s = 3{,}5\, t + 7{,}0 \\ s = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4\, t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 2{,}4\, t^2 = 3{,}5\, t + 7{,}0 \\ s = 3{,}5\, t + 7{,}0 \end{cases}$$

l'equazione risolvente di secondo grado in t che si ottiene è la seguente:

$$\frac{1}{2} \cdot 2{,}4\, t^2 - 3{,}5\, t - 7{,}0 = 0 \Rightarrow 1{,}2\, t^2 - 3{,}5\, t - 7{,}0 = 0 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 33{,}60}}{2{,}4} \approx \frac{3{,}5 \pm 6{,}8}{2{,}4} \approx \begin{cases} -1{,}4 & non\ accettabile \\ 4{,}3 & accettabile \end{cases}$$

il ciclista C raggiunge l'amico A dopo circa 4,3 secondi dall'istante in cui si è rimesso in moto. Ed ecco la prima risposta al problema:

$$t \approx 4{,}3\ s$$

La distanza percorsa dalla C è esattamente la posizione di C corrispondente all'istante $t = 4{,}3\ s$

$$s\,(4{,}3) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4 \cdot 4{,}3^2 \approx 22\ m$$

Allo stesso risultato si giunge ovviamente anche con l'altra equazione oraria del sistema (infatti all'istante $t = 4{,}3\ s$ i due amici occupano la medesima posizione)

$$s\,(4{,}3) = 3{,}5 \cdot 4{,}3 + 7 \approx 22\ m\ .$$

Per calcolare la velocità di C nell'istante del sorpasso basta usare la legge oraria della velocità:

$$v = a\, t + v_0 \Rightarrow v(4{,}3) = 2{,}4 \cdot 4{,}3 + 0 = 10{,}32\ m/s \approx 10\ m/s\, .$$