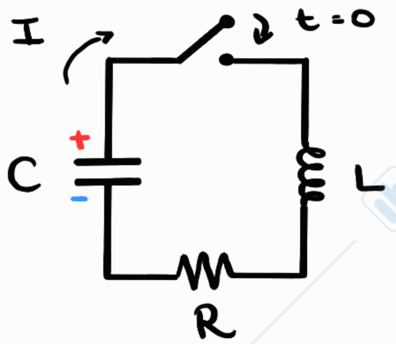
CORRENTI ALTERNATE

Cominciamo con lo studio di un circuito con tutti e tre gli elementi (C, R, L): è infatti un prototipo di circuito in corrente alternata.

CIRCUITO RLC

Facciamo il caso più semplice possibile: senza batteria, ma con un condensatore inizialmente carico con $\Delta V_C = \Delta V$



REM

$\Delta V_C = q/C$

$\Delta V_R = RI$

$\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt}$

Non appena chiudo l'interruttore a $t=0$ inizia a scorrere una corrente nel circuito.
Se non avessimo l'induttanza avremmo il circuito RC che abbiamo già studiato.
La presenza dell'induttanza complica il circuito e cambia l'andamento della corrente.

Cominciamo lo studio di questo circuito scrivendo l'equazione della maglia:

$$\Delta V_L = \Delta V_C + \Delta V_R$$

$\Delta V_L = f_a$ (è una fem -> a sx)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\leadsto \quad \frac{q}{C} + RI + L\frac{dI}{dt} = 0$$

Derivo: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{C} + RI + L\frac{dI}{dt}\right) = 0$$

$$\leadsto \quad \boxed{L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0}$$

$I = dq/dt$!

EDO II ORDINE!

La corrente (soluzione dell'eq.) non avrà più un andamento esponenziale ma OSCILLANTE!

FORMA NORMALE: $$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0$$

NOTA Se $R=0$ ho $\ddot{I} - \omega^2 I = 0$: è l'EQ.NE del MOTO del PENDOLO per PICCOLE OSCILLAZIONI

cioè $\ddot{x} - \omega^2 x$ con sol.
$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$

$\Rightarrow$ sol. è $$I(t) = A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$\leadsto$ SENZA RESISTENZA: LA CORRENTE HA UN ANDAMENTO PURAMENTE OSCILLATORIO!

Quello che otterremo invece nel circuito RLC, è che la resistenza faccia contemporaneamente I e che dunque risulti un MOTO ARMONICO SMORZATO di $I(t)$.

Risolviamo:

- Cerco una sol. della forma:

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

φ_0 è la FASE INIZ.

- Condizione iniziale: $I(0) = 0$ (essendoci l'induttanza la corrente è continua in $t=0$ e vale $I=0$)

$\Rightarrow I_0 \sin(\varphi_0) = 0$

$\Rightarrow \sin \varphi_0 = 0$

$\Rightarrow \varphi_0 = 0$

- Derivata prima:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t)\right) =$$

$$= -I_0 \alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega t) + I_0 \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t).$$

- Derivata seconda:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right) = I_0 \alpha^2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) -$$

$$-2 I_0 \alpha \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t) - I_0 \omega^2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t).$$

- Sostituisco I, dI/dt e d^2I/dt^2 nell'eq.ne:

$$I_0 \alpha^2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) - 2 I_0 \alpha \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$$

$$- I_0 \omega^2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) + \frac{R}{L}\Big(-I_0 \alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$$+ I_0 \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \Big) + \frac{1}{LC}\left(I_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t)\right) = 0$$

Che diventa:

$$\cancel{I_0 e^{-\alpha t}}\left[\left(\alpha^2-\omega^2-\frac{R}{L}\alpha+\frac{1}{LC}\right)\sin(\omega t)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{R}{L}\omega-2\alpha\omega\right)\cos(\omega t)\right]=0$$

NOTA $A\sin t + B\cos t = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$, infatti $\nexists\, t$ t.c. $\sin t$ e $\cos t$ siano contemporaneamente nulli.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2-\omega^2-\frac{R}{L}\alpha+\frac{1}{LC}=0 \\ \omega\left(\frac{R}{L}-2\alpha\right)=0 \end{cases}$$

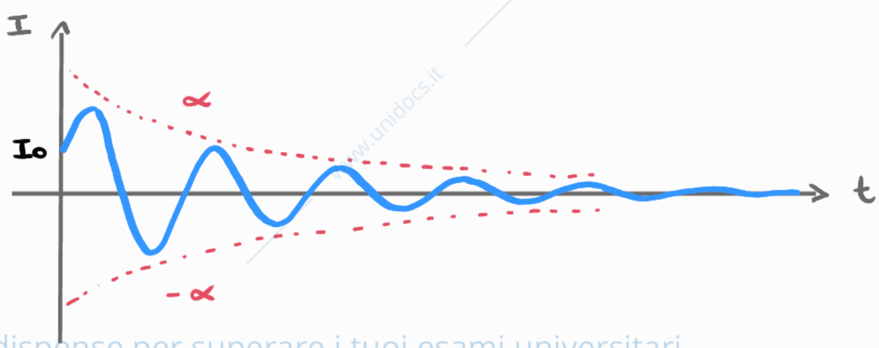
$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{2L}$: **SMORZAMENTO**

(quello che mi fa cadere l'oscillazione, dovuto all'attrito elettrico e infatti è direttam. prop. alla resistenza)

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$: **FREQUENZA dell'oscillaz.**

$\Rightarrow$ SOLUZIONE: $I(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\; t\right)$

che si rappresenta:



⚠ Tutto ciò è valido **solo** se ω è reale, cioè:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \text{ esiste } \iff \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \geq 0$$

$$\iff \frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{4L^2}$$

$$\iff R \leq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

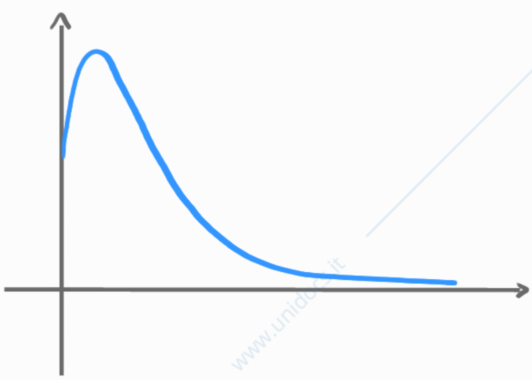
(ovvero sono considerazioni valide per una resistenza abbastanza piccola)

Se invece $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \omega$ complesso
$\Rightarrow$ seno con argom. complesso e la soluz. $I(t)$ decresce in modo esponenziale dopo una lieve crescita:

SOL DEL TIPO: $I(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}$

$I(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$

$\Rightarrow I(t) = A(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t})$ (A si ricava dalla 2ª condiz. iniziale su $\dot{I}(0)$, ma non ci interessano tutti i calcoli specifici)



L'effetto in qs caso è quello di un PENDOLO

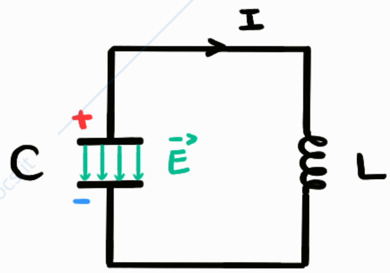
SOVRASMORZATO, perchè la resistenza/attrito è talmente forte da bloccare subito l'oscillazione.

(è come immaginare un pendolo nel miele)

INTERPRETAZIONE FISICA del PERCHÈ LA CORRENTE È DESCRITTA DA UNA FUNZIONE PERIODICA

Vogliamo indagare sulle oscillazioni della corrente → studiamo il circuito di prima, ma senza resistenza, il cui unico effetto era quello di smorzare le oscillazioni.

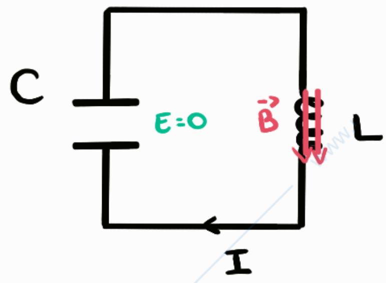
1) All'inizio (t=0), il condensatore è completamente carico => al suo interno c'è un campo elettrico.



Dal polo + del condensatore inizia a scorrere corrente (il condensatore carico si comporta come una batteria fino a esaurimento cariche)

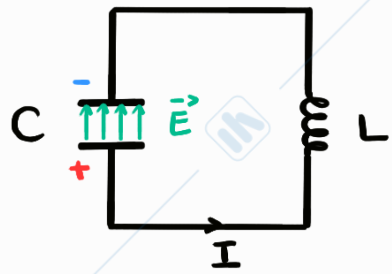
Scorrendo nel circuito, la corrente passa nell'induttanza in cui genera un campo magnetico.

⇝ Dopo 1/4 di PERIODO il condensatore è completamente scarico e ho un campo magnetico nell'induttanza.



2) L'induttanza poi si spegne (il condens. è scarico e non le fornisce più corrente).
L'induttanza, come abbiamo visto nello scorso capitolo, quando si spegne rilascia tutta l'energia che era servita a generare $\vec{B}$, che torna sotto forma di corrente al condensatore (sull'armatura inferiore)

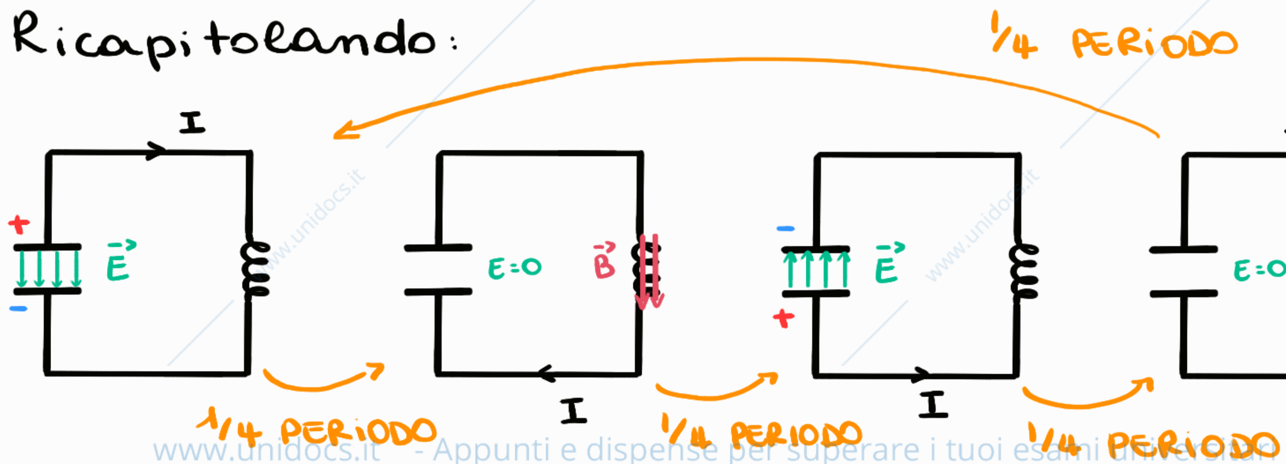
~> Dopo 1/2 PERIODO il condensatore è di nuovo carico, ma al contrario: le cariche + si sono tutte spostate sull'armatura inferiore.



3) Si ripetono i punti 1) e 2), al contrario (con la corrente nel senso opposto) per un altro 1/2 periodo.

~> Dopo 1 PERIODO ho di nuovo la situazione di partenza!

Ricapitolando:



Quindi, in presenza di un'induttanza, si ha un processo periodico, in cui si alternano la formazione di un campo elettrico e di un campo magnetico all'interno del condensatore e all'interno dell'induttanza risp.

CIRCUITO RLC CON GENERATORE

Useremo generatori di fem alternata, che si rappresentano con il seguente simbolo:

f(t)

Cosa vuol dire "ALTERNATA"?
Facciamo un po' di:

NOMENCLATURA:

- Una grandezza fisica f(t) si dice PERIODICA di periodo T $\iff$ $\forall t,\ f(t+T) = f(t)$

- Una grandezza fisica f(t) è detta ALTERNATA se è periodica e la media su un periodo è nulla: $\langle f \rangle_T = 0$

NOTA: MEDIA O VALOR MEDIO

$$\langle f \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(u)\, du \quad , \text{ o eq.nte:}$$

$$m_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

perchè soluzioni di $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

- Un caso particolare, ma che useremo sempre, di grandezze alternate sono le grandezze fisiche ARMONICHE, che sono del tipo:

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

dove: ω : "PULSAZIONE", $\omega = 2\pi\nu$, $[\omega] = Hz$

ν : "FREQUENZA", $\nu = \frac{1}{T}$, $[\nu] = \frac{1}{s} = Hz$

φ : "FASE INIZIALE"

f_0 : "AMPIEZZA"

Quando si ha a che fare con grandezze alternate, a volte non si usa l'ampiezza, ma il cosiddetto "VALORE EFFICACE" (o RMS, dall'inglese ROOT-MEAN-SQUARE):

$\sqrt{\ }$ MEDIA al ^{2}

$$f_{RMS} = \sqrt{\langle f^2 \rangle_T}$$, che ovviam $[f_{RMS}] = [f]$

Oss Se f è ARMONICA $\Rightarrow$ $f_{RMS} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$ } AMPIEZZA .

Infatti, f armonica significa $f = \sin \vee f = \cos$.

Calcolo:

$$\langle \sin^2 \rangle_T = m_{[0,2\pi]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2 \rangle_T = m_{[0,2\pi]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

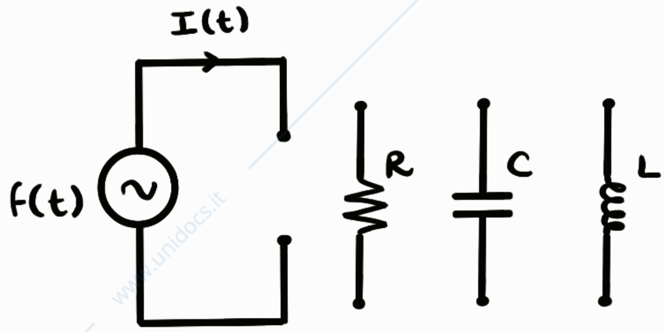
Dopo aver dato queste utili definizioni, vogliamo ora capire il comportamento dei:

COMPONENTI ELETTRICI in CORRENTE ALTERNATA

Consideriamo un circuito con un generatore che fornisce corrente I(t) ALTERNATA ARMONICA (la prenderemo sempre armonica da qui in poi):

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

e per studiare cosa succede, chiudiamo il circuito con una resistenza, un condensatore o un'induttanza e calcoliamo la ddp ai suoi capi: $\Delta V_{R,C,L} = ?$



R Per una resistenza la ddp è data da Ohm: $\Delta V_R = RI$. Questo vale istante per istante, quindi essendo I dipendente dal tempo, lo sarà anche ΔV_R:

$$\Delta V_R(t) = R\,I(t) = R I_0 \cos(\omega t)$$

Questo risultato non sorprende: istante per istante, in una resistenza, corrente e tensione sono proporzionali e qui troviamo che sono entrambi dei coseni.

Le cose cambiano per gli altri due:

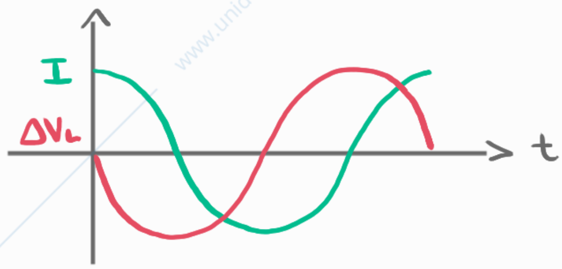
L $\Delta V_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -L\,\omega\, I_0 \sin(\omega t) =$

(il segno dipende dalla legge di LENZ, in base a $\frac{dI}{dt} > 0$ o $\frac{dI}{dt} < 0$, ma qui ci interessa solo il modulo)

$$= I_0\, L\, \omega \cos(\omega t + \pi/2).$$

⇝ Ai capi di un'induttanza c'è uno **SFASAMENTO di $\pi/2$** (cioè di $1/4$ di PERIODO) tra **corrente e tensione**. Si dice anche che in induttanza corrente e tensione non sono in fase.

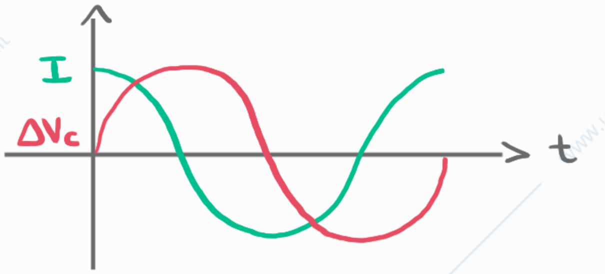
Visto graficamente:



C Anche sulle armature del condensatore c'è uno sfasamento tra tensione e corrente (ma in questo caso ΔV_C è la curva di I in AVANTI di $\pi/2$ invece che indietro come ΔV_L):

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} \overset{I(t) = dq/dt}{=} \frac{1}{C} \int I(t)\, dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t) =$$

$$= \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2)$$



⇝ Con CAPACITÀ e INDUTTANZA sfasamento di 1/4 di periodo tra corrente e tensione.

Questo complica molto la risoluzione dell'eq. che descrive la maglia con C o L. Per semplificare i calcoli è stato inventato il "METODO SIMBOLICO", che non vedremo però.

POTENZA in CORRENTE ALTERNATA

Ricordiamo che la potenza è ciò che fa lavoro (è lavoro nell'unità di tempo). Abbiamo definito la potenza, parlando dell'effetto Joule, come: $P = \Delta V \cdot I$.

- Se ΔV e I sono COSTANTI → nessun problema
- Se ΔV e I sono VARIABILI ...

... in un circuito con sole RESISTENZE → non c'è problema.

... in un circuito con INDUTTANZE o CONDENSATORI → PROBLEMA!

Infatti, abbiamo visto che ΔV e I sono sfasate in qs caso => il loro prodotto istante per istante non è costante!

Cerchiamo allora di capire meglio com'è fatta la potenza in corrente alternata.
Sappiamo che:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$
$$\Delta V(t) = I_0 \underbrace{Z}_{} \cos(\omega t + \arctg(X/R))$$

Ottenuto con il METODO SIMBOLICO

MODULO IMPEDENZA:
$Z = \sqrt{R^2+X^2}$, con R resistenza e X reattanza (che rappresenta lo sfasamento)

Perciò la POTENZA ISTANTANEA è:

Chiamiamo $\varphi = \arctg(X/R)$

$$W(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= \underbrace{I_0^2 Z}_{} [\cos^2(\omega t)\cos\varphi - \underbrace{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}_{}\sin\varphi] =$$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$

REM $I^2 R$ è la POTENZA DISSIPATA da una resistenza x effetto Joule.

$$= I_0^2 Z [\cos^2(\omega t)\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\sin\varphi]$$

Mentre la POTENZA MEDIA SU UN PERIODO è:

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T W(u)\,du = \frac{1}{2} I_0^2 \mathcal{Z} \cos\varphi$$

OSS che il 2° termine della potenza istantanea non contribuisce alla potenza media!
Per questo chiamiamo:

- il 1° termine:

POTENZA REALE (istantanea)

$$\boxed{P(t) = I_0^2 \mathcal{Z} \cos^2(\omega t)\cos\varphi}$$

$P(t) \geq 0$ sempre, per questo CONTRIBUISCE alla POTENZA MEDIA (il suo valor medio è positivo) e quindi è ciò che EFFETTIVAMENTE FA LAVORO.

- il 2° termine:

POTENZA REATTIVA (istantanea)

$$\boxed{Q(t) = -\frac{1}{2} I_0^2 \mathcal{Z} \sin(2\omega t)\sin\varphi}$$

$Q(t) \gtrless 0$: per metà periodo è positiva, per l'altra metà negativa => il suo valor medio su un intero periodo è 0.
Per questo NON CONTRIBUISCE alla POTENZA MEDIA e NON COMPIE LAVORO.

Nell'interpr. fisica del perchè la corrente in un circuito con induttanza abbia andamento periodico, abbiamo visto che si generavano un campo elettrico e uno magnetico, in modo alternato, nel condensatore e nell'induttanza rispettivam.
E abbiamo visto che veniva usata dell'energia x generarli, che veniva poi tutta rilasciata / restituita al momento della loro distruzione.

La potenza reattiva rappresenta questa energia: non compie effettivo lavoro, perchè alla fine di un periodo siamo tornati al punto di partenza e tutta l'energia usata è stata anche restituita, ma c'è.

C'è ancora una potenza che si definisce quando si lavora in circuiti in corrente alternata: la POTENZA APPARENTE.
(quella che si paga al fornitore di energia elettrica)

Infatti ai fornitori di energia interessa il consumo su un lungo periodo (3 mesi ca), non sul periodo (brevissimo) della corrente nelle nostre case, che è $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{50\ Hz} = 0{,}02\ s$ ca.

In più ci sono altri motivi tecnici.

La POTENZA APPARENTE sfrutta i valori efficaci di corrente e tensione:

$$P_A = V_{RMS} I_{RMS} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{V_0 I_0}{2}$$

OSS che P_A è sempre maggiore della potenza media, infatti:

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{2} I_0^2 Z \cos\varphi = \overbrace{\frac{I_0 V_0}{2}}^{P_A} \underbrace{\cos\varphi}_{\leq 1} \leq P_A$$

Quindi: se $\cos\varphi = 1$ $\langle W \rangle_T = P_A$ e tutta la potenza apparente (che pago) è potenza che effettivamente fa lavoro. Ma se $\cos\varphi < 1$, parte della potenza che pago non riesco a sfruttarla perchè si perde sotto forma di potenza reattiva.

Ma $\cos\varphi < 1$ $\leftrightarrow$ $\cos\varphi \neq 1$ $\leftrightarrow$ $\sin\varphi \neq 0$ $\leftrightarrow$ $\varphi \neq 0$: cioè perdo parte di potenza apparente in reattiva quando il CIRCUITO È SFASATO.

Per evitare ciò il circuito deve essere IN FASE: motivo x cui gli elettrodomestici contengono condensatori e induttanze, per far sì che tutti i componenti del

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

circuito domestico siano in fase e non venga sprecata energia.